VIII Европейский математический турнир «Связист», 18 – 24 февраля 2025 г.

Математический турнир Европы

Командная олимпиада. 7 – 8 классы. Решения. 19 февраля

1. *Капитан команды Вася и его заместитель Петя вышли из коттеджа и вместе пошли на презентацию задач командной олимпиады в корпус, который находится в* 600 *м от коттеджа. Пройдя* 100 *м, Вася понял, что забыл в коттедже ручку с тетрадкой и отправил Петю за ними, а сам продолжил идти на презентацию. Петя добежал до коттеджа, мгновенно схватил ручку с тетрадкой и прибежал к месту презентации одновременно с приходом Васи. Во сколько раз скорость бега Пети больше скорости ходьбы Васи, если обе эти величины постоянны?*

Ответ. В $7/5$ раза. **Решение.** Пусть скорость ходьбы равна v, а бега — u. Тогда Вася прошёл 500 метров за то же время, за которое Петя пробежал 700 м. Значит, $500/v = 700/u$ и $u = 7v/5$.

2. *Найдите наименьшее натуральное число, не представимое в виде $p - q^2$, где p и q — простые.*

Ответ. 5. **Решение.** Докажем, что меньшие 5 числа не подходят. Для этого достаточно каждое из них представить в искомом виде: $1 = 5 - 2^2$, $2 = 11 - 3^2$, $3 = 7 - 2^2$, $4 = 13 - 3^2$. Теперь докажем, что 5 подходит, т.е. что уравнение $5 = p - q^2$ не имеет решений. Перепишем условие в виде $p = q^2 + 5$. Если q нечетно, то q^2+5 четно и больше 2, значит не простое. Если же q четно, то равно 2, а значит $p = 2^2+5 = 9$ — не простое.

3. 300 *человек, каждый из которых рыцарь или лжец, сели за круглый стол. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Каждый посмотрел на двух ближайших справа и двух ближайших слева и заявил, что среди этих четверых ровно двое — рыцари. Каково наименьшее возможное количество рыцарей, если известно, что хотя бы один рыцарь среди них есть?*

Ответ. 180. **Решение.** Пример. Разобьем круг на пятерки, в каждой посадим сначала 3 рыцарей, следом 2 лжецов. Нетрудно проверить, что пример подходит. Оценка. Докажем, что среди любых пятерых подряд идущих есть хотя бы 3 рыцаря (отсюда оценка будет немедленно следовать). От противного, пусть их не больше 2. Первый случай: пусть нашлась пятерка, в которой ровно 1 рыцарь. Тогда с одной стороны от него два лжеца, значит с другой 2 рыцаря — мы нашли 3 рыцарей подряд, а тогда, двигаясь по кругу, рассадка восстанавливается однозначно (как в примере), и рыцарей ровно 180. Второй случай: пусть нашлась пятерка, в которой вообще нет рыцарей. Пойдем по кругу, пока впервые не наткнемся на рыцаря: так мы найдем пятерку, в которой ровно 1 рыцарь, а этот случай мы уже рассмотрели. Наконец, пусть в какой-то пятерке ровно 2 рыцаря. Такого вообще не может быть: если центральный человек рыцарь, то их в этой пятерке должно быть трое и рыцарь соврал, а если лжец — то он сказал правду, что невозможно.

4. *В треугольнике ABC $\angle C = 3\angle A$. Серединный перпендикуляр ℓ к отрезку AC пересекает отрезок AB в точке D. Биссектриса угла B пересекает ℓ в точке M. Точка E такова, что M — середина отрезка DE. Найдите $\angle EAB$.*

Ответ. 90°. **Решение.** Пусть $\angle A = \alpha$, $\angle C = 3\alpha$. Тогда $\angle DCA = \alpha$ из равнобедренности ADC, и $\angle BDC = 2\alpha$ как внешний угол в $\triangle ADC$. Кроме того, $\angle BCD = \angle C - \angle DCA = 3\alpha - \alpha = 2\alpha$. Итого, $\angle BCD = \angle BDC$, значит $BC = BD$. Тогда BM — не только биссектриса, но и медиана и высота в равнобедренном треугольнике BCD, значит $CM = DM = EM$. Тогда $\angle DCE = 90^\circ$. Но тогда и $\angle EAB = \angle DAE = \angle DCE = 90^\circ$.

5. *Натуральное* 2025*-значное число n таково, что число, образованное любыми 6 его подряд идущими цифрами, делится на 64 (образованные таким образом числа могут начинаться с 0). Докажите, что n делится на 2^{2025}.*

Решение. Пусть $\overline{abcdefg}$ — блок из 7 подряд идущих цифр числа n, обозначим $\overline{bcdef}$ за x. Тогда по условию $10^5 a + x$ и $10x + g$ делятся на 64. Домножая первое на 10 и вычитая из второго, получаем $10^6 a - g$ делится на 64. Но 10^6 тоже делится на 64, значит g делится на 64. При этом g — цифра, значит

$g = 0$. Это верно для любой цифры числа n, кроме быть может первых шести. Тогда $n = \overline{abcdef} \cdot 10^{2019}$, причем по условию $\overline{abcdef}$ делится на 2^6, значит само n делится на $2^6 \cdot 2^{2019} = 2^{2025}$, что и требовалось доказать.

6. *Саша и Маша играют в игру на полоске из n клеток. На самой левой клетке изначально лежит камень. За ход можно сдвинуть камень либо на 9 вправо, либо на 20 вправо, либо на 10 влево (обязательно оставаясь в пределах полоски). Побеждает тот, после чьего хода камень впервые окажется на самой правой клетке полоски. Найдите все $n \geqslant 100$, при которых кто-нибудь из игроков может действовать так, чтобы гарантированно победить.*

Ответ. Таких n нет: игра всегда закончится вничью. **Решение 1.** Приведем стратегию, позволяющую каждому из игроков не проиграть (а значит, не дать другому выиграть). Пронумеруем клетки справа налево от 0 до $n-1$ (тот кто попал в 0 — побеждает). Предположим, у соперника есть выигрышная стратегия, позволяющая победить независимо от того, как мы будем действовать. Будем всегда делать ход на 10 влево, если это возможно (из первых 10 клеток будем ходить на 9 вправо). Рано или поздно на наш ход на 10 влево из некоторой клетки A соперник должен ответить ходом на 20 вправо, в противном случае игра никогда не покинет первые 30 клеток полоски. В ответ на этот ход снова пойдем на 10 влево, и соперник окажется в клетке A, в которой 3 хода назад были мы. Поскольку у него существовала выигрышная стратегия, позволяющая выиграть, когда соперник находится в клетке A, сейчас у нас есть выигрышная стратегия, ведь теперь уже наш соперник оказался в клетке A. Но это приводит к противоречию, ведь не могут оба игрока одновременно иметь выигрышную стратегию!

Решение 2. В тех же обозначениях, что и в 1 решении, с любой клетки можно сделать ход так, чтобы не попасть на клетки 9 и 20. Это доказывается небольшим перебором случаев. На клетку 9 можно попасть с клеток 18 и 29, на клетку 20 с клеток 10, 29, 40. Но с 18 можно пойти на 28, с 29 на 39, с 10 на 1, с 29 на 39, с 40 на 50. Тогда беспроигрышная стратегия в этом и заключается: никогда не делать ход на клетки 9 и 20. Соперник только с них мог бы сделать последний победный ход, значит никогда не выиграет.

7. *В четырехугольнике $ABCD$ $\angle BAD = \angle BCD = 90^\circ$. Точки K и M — середины CD и BC соответственно. Точка P на отрезке AM такова, что $\angle ACP = \angle AMC$. Докажите, что $AK = PK$.*

Решение. Пусть S — середина AC, T — середина AP. Из вписанности $ABCD$ следует вписанность $SMCK$ (эти четырехугольники подобны с коэффициентом 2), причем KM — диаметр описанной окружности $SMCK$. Прямая ST — средняя линия в ACP, поэтому $\angle AST = \angle ACP = \angle AMC$, откуда следует вписанность $CSTM$. Значит, T лежит на окружности $(SMCK)$ с диаметром KM, откуда $\angle KTM = 90^\circ$. Значит в треугольнике AKP высота совпадает с медианой, т.е. $AK = PK$, что и требовалось доказать.

8. *Вещественные числа a и b удовлетворяют условию*

$$ab + \sqrt{ab+1} + \sqrt{a^2+b}\sqrt{a+b^2} = 0.$$

Найдите все значения, которые может принимать выражение

$$b\sqrt{a^2+b} + a\sqrt{b^2+a}.$$

Ответ. 1. **Решение.** Пусть искомое выражение равно x. Обозначим $(a - \sqrt{a^2+b})(b - \sqrt{b^2+a}) = y$. Преобразуем y двумя способами. Первый это просто раскрытие скобок: $y = ab + \sqrt{a^2+b}\sqrt{b^2+a} - x = -\sqrt{ab+1} - x$. Второй это домножение на сопряженное, с последующим раскрытием скобок в знаменателе: $y = \frac{(-b)(-a)}{(a+\sqrt{a^2+b})(b+\sqrt{b^2+a})} = \frac{ab}{x - \sqrt{ab+1}}$. Приравняем два полученных из y выражения, получим $-\sqrt{ab+1} - x = \frac{ab}{x-\sqrt{ab+1}}$, откуда $-ab = x^2 - (ab+1)$, т.е. $x^2 = 1$, $x = \pm 1$.

Чтобы доказать, что $x = 1$, остается проверить, что $x \geqslant 0$. Из условия следует, что $ab < 0$, НУО $a > 0 > b$. Тогда первое слагаемое в x не меньше ab, а второе не меньше $a|b|$, значит их сумма не меньше 0.

Пример приводить не требуется, поскольку ответ единственный и из условия следует, что такие a и b существуют.