Математический турнир Европы

VIII Европейский математический турнир «Связист», 18 – 24 февраля 2025 г.

Командная олимпиада. 6 класс. Решения. 19 февраля

1. *У Серёжи есть клетчатая доска, длина и ширина которой – последовательные натуральные числа. Таня заметила, что эту доску можно разрезать на прямоугольники* 3×5 *(которые можно поворачивать). А Маша заметила, что эту доску можно разрезать на прямоугольники* 5×7 *(которые тоже можно поворачивать). Какие наименьшие размеры могут быть у Серёжиной доски?*

Ответ. 14×15 **Решение.** Площадь доски должна делиться на 3, 5 и 7. Кроме того, размеры доски – последовательные числа, следовательно, одно из них чётно, и площадь делится также на 2. Наименьшее число, кратное 2, 3, 5 и 7 – это $210 = 14 \cdot 15$.
Прямоугольник 14×15 несложно разрезать как на прямоугольники 5×7 (разделив сторону 14 на две равные части, а сторону 15 – на 3), так и на прямоугольники 3×5 (разбив сначала на части размерами 9×15 и 5×15).

2. *Капитан команды Вася и его заместитель Петя вышли из коттеджа и вместе пошли на презентацию задач командной олимпиады в корпус, который находится в* 600 *м от коттеджа. Пройдя* 100 *м, Вася понял, что забыл в коттедже ручку с тетрадкой и отправил Петю за ними, а сам продолжил идти на презентацию. Петя добежал до коттеджа, мгновенно схватил ручку с тетрадкой и прибежал к месту презентации одновременно с приходом Васи. Во сколько раз скорость бега Пети больше скорости ходьбы Васи, если обе эти величины постоянны?*

Ответ. В 7/5 раза. **Решение.** Пусть скорость ходьбы равна v, а бега — u. Тогда Вася прошёл 500 метров за то же время, за которое Петя пробежал 700 м. Значит, $500/v = 700/u$ и $u = 7v/5$.

3. *На доске написаны по одному разу все составные числа, не превосходящие 30. Можно ли стереть три из них, а остальные раскрасить в красный, синий и зелёный цвета так, чтобы произведение всех чисел одного цвета было одним и тем же для красных, синих и зелёных чисел?*

Ответ. Можно. **Решение.** Стереть нужно 12, 22 и 26. Разделить на группы можно, например, так: красные 4, 8, 9, 15, 20, 21; синие 6, 16, 25, 27, 28; зелёные 10, 14, 18, 24, 30.

4. 300 *человек, каждый из которых рыцарь или лжец, сели за круглый стол. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Каждый посмотрел на двух ближайших справа и двух ближайших слева и заявил, что среди этих четверых ровно двое — рыцари. Каково наименьшее возможное количество рыцарей, если известно, что хотя бы один рыцарь среди них есть?*

Ответ. 180. **Решение.** Пример. Разобьем круг на пятерки, в каждой посадим сначала 3 рыцарей, следом 2 лжецов. Нетрудно проверить, что пример подходит. Оценка. Докажем, что среди любых пятерых подряд идущих есть хотя бы 3 рыцаря (отсюда оценка будет немедленно следовать). От противного, пусть их не больше 2. Первый случай: пусть нашлась пятерка, в которой ровно 1 рыцарь. Тогда с одной стороны от него два лжеца, значит с другой 2 рыцаря — мы нашли 3 рыцарей подряд, а тогда, двигаясь по кругу, рассадка восстанавливается однозначно (как в примере), и рыцарей ровно 180. Второй случай: пусть нашлась пятерка, в которой вообще нет рыцарей. Пойдем по кругу, пока впервые не наткнемся на рыцаря: так мы найдем пятерку, в которой ровно 1 рыцарь, а этот случай мы уже рассмотрели. Наконец, пусть в какой-то пятерке ровно 2 рыцаря. Такого вообще не может быть: если центральный человек рыцарь, то их в этой пятерке должно быть трое и рыцарь соврал, а если лжец — то он сказал правду, что невозможно.

5. *В клетках таблицы* 8×8 *расставлены числа 1 и* -1 *так, что в каждом квадрате* 2×2 *сумма чисел равна 2 или* -2*. Докажите, что в таблице есть две строки, в которых стоят одни и те же числа в одном и том же порядке.*

Решение. Условие означает, что под двумя одинаковыми числами, стоящими в одной строке рядом, в следующей строке стоят разные, а под двумя разными – одинаковые. Это значит, что под двумя соседними одинакоыми числами двумя строками ниже стоят два одинаковых, а под двумя разными – два разных. Таким образом, либо в третьей строке стоят те же числа, что и в первой, либо каждое число в ней отличается от соответствующего числа в первой строке знаком. Тогда в силу такого же рассуждения пятая строка должна совпасть либо с третьей, либо с первой.

6. *Обозначим $c(n)$ количество цифр десятичной записи натурального числа n. Какое наибольшее количество различных натуральных чисел можно взять так, чтобы для любых двух разных взятых чисел a и b выполнялось условие*

$$c(a+b)+2>c(a)+c(b)?$$

Ответ. 60. **Решение.** Если $a<b$, то, очевидно, $c(a+b)\leqslant c(b)+1$, то есть должно выполняться неравенство $c(a)+c(b)<c(b)+3$. Значит, в десятичной записи a не более двух цифр, то есть все наши числа, кроме, быть может, одного, меньше 100.
Двузначных чисел может быть не более 50. В противом случае найдутся два числа a и b, не большие 50, при этом $c(a+b)+2=4=c(a)+c(b)$ – противоречие.
Значит, всего чисел не более, чем $1+50+9=60$. Непосредственно можно убедиться в том, что 60 чисел $1, 2, \ldots, 9, 50, 51, \ldots, 99$ и 999 удовлетворяют условию задачи.

7. *В вершинах правильного 100-угольника расставлены все натуральные числа от 1 до 100. Оказалось, что у каждой оси симметрии 100-угольника можно выбрать сторону так, что каждое число, находящееся с этой стороны оси, больше симметричного ему числа (к числам, стоящим на самой оси, это не относится). Сколько существует таких расстановок? Расстановки, отличающиеся поворотом, считаются одинаковыми.*

Ответ. две. **Решение.** Дадим номер 100 вершине, в которой стоит число 100, и проведём через эту вершину ось симметрии 100-угольника. Выберем из вершин, соседних с 100-й, ту, в которой стоит большее число, и дадим ей номер 99, а все остальные вершины занумеруем так, чтобы номера от 1 до 100 шли по порядку. Число, стоящее в вершине с номером n, обозначим a_n. Поскольку $a_{99}>a_1$, имеем $a_{100-k}>a_k$ при $1\leqslant k\leqslant 49$. Проведём ось симметрии между 99-й и 100-й вершинами. Поскольку $a_{99}<a_{100}$, имеем $a_k>a_{99-k}$ при $1\leqslant k\leqslant 49$. Мы получили цепочку неравенств, в которой участвуют все 100 чисел: $a_{100}>a_{99}>a_1>a_{98}>a_2>a_{97}>\cdots>a_{51}>a_{49}>a_{50}$. Значит, все числа однозначно определены: $a_k=100-2k$ при $1\leqslant k\leqslant 49$, $a_{100-k}=101-2k$ при $1\leqslant k\leqslant 50$, $a_{100}=100$. Поскольку любой из двух соседей числа 100 мог оказаться больше другого, мы получили две (симметричных) расстановки. Несложно проверить, что они удовлетворяют условию задачи. Действительно, при любом расположении оси симметрии, 100 больше симметричного ему числа x. Между 100 и x располагаются числа одной чётности, увеличивающиеся от x в сторону оси симметрии. Равным образом, между 1 и симметричным ему числом располагаются числа одной чётности, увеличивающиеся от 1 в сторону оси симметрии. Остальные числа разбиваются на пары, в которых число, которое ближе к 100, больше.

8. *У каждого натурального числа от 1 до n посчитали количество натуральных делителей (включая 1 и само число) и полученные результаты сложили. Сумма оказалась количеством всех натуральных делителей числа $n!$. При каких n такое могло произойти?*

Ответ. 1 и 4. **Решение.** Несложно проверить, что из чисел, меньших 5, подходят только 1 и 4, и что $d(1)+d(2)+d(3)+d(4)+d(5)=10<16=d(5!)$. Докажем, что

$$d(1)+d(2)+\cdots+d(n)<d(n!)$$

при всех $n\geqslant 5$. При $n=5$ это верно. При переходе от $n-1$ к n левая часть увеличивается на $d(n)$; найдём у числа $n!$ хотя бы $d(n)$ делителей, не являющихся делителями числа $(n-1)!$. Такими будут, например, все числа вида $d\cdot(n-1)!$, где d – делитель n, больший 1, и число $\frac{n!}{n-1}>(n-1)!$, не находящееся среди предыдущих, так как $\frac{n}{n-1}$ при $n>5$ не является натуральным делителем числа n.