VIII Европейский математический турнир «Связист», 18 – 24 февраля 2025 г.

Математический турнир Европы

Командная олимпиада. 5 класс. Решения. 19 февраля

1. *Палиндром — это число, которое не меняется при записи задом-наперёд (например, 6, 404, 5335). Можно ли представить 2025 как сумму двух палиндромов?*

Ответ. Можно. **Решение.** Например, 1551+474.

2. *Трое богатырей хвастались друг перед другом:*
Илья: Я победил 22 змея; Добрыня на 2 больше меня, а Алёша на одного меньше меня.
Добрыня: Я победил не меньше змеев, чем любой из вас; Алёша победил всего лишь 25 змеев; у нас с Алёшей число побежденных змеев отличается на 3.
Алёша: Я победил меньше змеев, чем Илья; Илья победил 23 змеев, а Добрыня – на 3 змея больше, чем Илья.
Оказалось, что каждый из богатырей ошибся только один раз из трёх. Так сколько же змеев победил каждый из них?

Ответ. Илья победил 23 змеев, Алёша — 22, Добрыня — 25. **Решение.** Обозначим число побеждённых змеев: у Ильи — И, у Алёши — А, у Добрыни — Д. Разберём случаи: неверно 1-е, 2-е или 3-е утверждение Ильи.

Случай 1. $И \neq 22$, $Д = И + 2$, $А = И - 1$. Тогда у Алёши $Д = И + 3$ неверно, значит $А < И$ и $И = 23$, откуда $Д = И + 2 = 25$, $А = И - 1 = 22$. Добрыня утверждает: 1. $Д \geqslant И$ и $Д \geqslant А$ — верно; 2. $А = 25$ — неверно; 3. Д-А или $А\text{-}Д = 3$ — верно. Этот случай подходит.

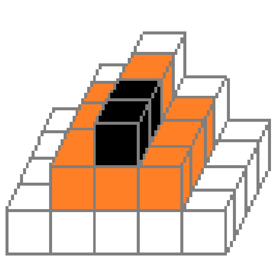
Случай 2. $И = 22$, $Д \neq И + 2$, $А = И - 1$. Тогда $А = 21$. Второе утверждение Алёши $И = 23$ ложно, тогда верно третье $Д = И + 3 = 25$. Но тогда у Добрыни неверны 2-е и 3-е утверждения, и этот случай не подходит.

Случай 3. $И = 22$, $Д = И + 2$, $А \neq И - 1$. Тогда $Д = И + 2 = 24$, и у Алёши 2-е и 3-е утверждения ложны. Этот случай не подходит.

3. *Карлсон ест торт в пять раз быстрее Малыша. Получив торт в 20.00 (8 часов вечера), они сразу же начали его вместе есть. Но хитрый Малыш попросил Карлсона слетать за шоколадом. Пока тот летал, Малыш ел. Карлсон вернулся через 20 минут и помог доесть торт. В результате они съели поровну. В какой момент времени они закончили?*

Ответ. В 20:25. **Решение.** Пусть Малыш съедает в минуту 1 кусок торта. За 20 минут отсутствия Карлсона Малыш съест 20 кусочков. Когда они едят вместе, Малыш съедает 1 кусочек в минуту, а Карлсон — 5, то есть каждую минуту Карлсон догоняет Малыша на 4 кусочка. Чтобы наверстать разницу, Карлсону нужно 5 минут (поскольку 20 делим на 4). Значит, всего Малыш ел 20+5 минут, и они закончили в 20:25.

4. *Алина построила башню из кубиков трёх разных цветов, но одинакового размера. На картинке слева — вид башни спереди, а справа — вид башни сверху. Какое наибольшее количество кубиков могла использовать Алина? Приведите пример башни с наибольшим количеством кубиков и объясните, почему ещё больше быть не могло.*



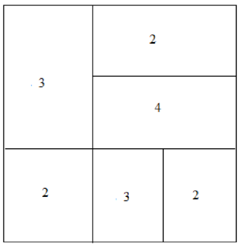
Ответ. 36. **Решение.** П р и м е р. см. рисунок. О ц е н к а. Рассмотрим слои фигуры, параллельные виду спереди. Так как спереди видно только 9 кубиков, то и в каждом слое их не более 9. Количество слоев равно 4, так как высота вида сверху равна 4. Поэтому и всего кубиков не более $4 \cdot 9 = 36$.

5. *Петя и Вася играют, начинает Петя. Вначале на доске написано число 225. За ход разрешается его уменьшить на число от 1 до 9, но в записи нового числа должны найтись хотя бы две одинаковые цифры. Кто не сможет сделать хода — проигрывает. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник?*

Ответ. Петя. **Решение.** Приведем стратегию за Петю. Нарисуем цепочку чисел, отмеченные штрихом получает после своего хода Петя, остальные — Вася. Большинство ходов — единственны, а там, где вариантов несколько, перечислены все возможные ходы Васи: 225, 221', 220 или 212, 211', 202, 199', 191, 188', 181, 177', 171, 166', 161, 155', 151, 144', 141, 133', 131, 122', 119-113, 110', 101, 99'. Получив число 99, Вася не может сделать ход.

6. *Числа 77, 78, …, 88 расставили на рёбра куба, затем для каждой вершины посчитали сумму чисел на трёх выходящих из неё рёбрах. Докажите, что найдутся две вершины с различными суммами.*
Решение. Допустим обратное: числа расставили так, что в каждой вершине одна и та же сумма S. Тогда сумма по всем вершинам равна $8S$, она кратна 8. Но каждое число на ребре входит ровно в две тройки: те, которые выходят из двух концов ребра. Значит, сумма чисел равна $2\cdot(77+78+\ldots+88) = 2\cdot 6\cdot(77+88)$, а это число на 8 не делится. Противоречие.

7. *Из нескольких прямоугольников сложили квадрат. Прямоугольники граничат друг с другом, если они примыкают друг к другу по отрезку (не просто по точке). В каждом прямоугольнике записали, со сколькими прямоугольниками он граничит. Может ли случиться так, что у каждой пары граничащих прямоугольников записанные числа различны?*
Ответ. Может. **Решение.** См. рис.



8. *У гидры 25 шей в ряд, на первой одна голова, на второй — две, …, на последней — 25 голов. Одним ударом меча Геракл может срубить ровно две головы с двух соседних шей. Какое наибольшее число голов гидры может срубить Геракл?*
Ответ. 312 головы **Решение.** Пример. Геракл рубит пары голов с двух самых правых шей пока на обеих есть головы, потом переходит к следующей справа паре, и т.д. В результате, с 24-й и 25-й шеи он срубит 48 голов, с 22-й и 23-й шеи — 44 головы и т.д., всего $48 + 44 + 40 + ... + 4 = 6 \cdot (48 + 4) = 312$. Оценка. Каждый раз Геракл срубает одну голову с чётной шеи и одну с нечётной. Всего на чётных шеях $2 + 4 + ... + 24 = 156$ голов. Даже если Геракл срубит их все, с нечётных шей он срубит столько же, всего не более $2 \cdot 156 = 312$ головы.