VIII Европейский математический турнир «Связист», 18 – 24 февраля 2025 г.

Математический турнир Европы

Командная олимпиада. 7 – 8 классы.
19 февраля

1. Капитан команды Вася и его заместитель Петя вышли из коттеджа и вместе пошли на презентацию задач командной олимпиады в корпус, который находится в 600 м от коттеджа. Пройдя 100 м, Вася понял, что забыл в коттедже ручку с тетрадкой и отправил Петю за ними, а сам продолжил идти на презентацию. Петя добежал до коттеджа, мгновенно схватил ручку с тетрадкой и прибежал к месту презентации одновременно с приходом Васи. Во сколько раз скорость бега Пети больше скорости ходьбы Васи, если обе эти величины постоянны?

2. Найдите наименьшее натуральное число, не представимое в виде $p - q^2$, где p и q — простые.

3. 300 человек, каждый из которых рыцарь или лжец, сели за круглый стол. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Каждый посмотрел на двух ближайших справа и двух ближайших слева и заявил, что среди этих четверых ровно двое — рыцари. Каково наименьшее возможное количество рыцарей, если известно, что хотя бы один рыцарь среди них есть?

4. В треугольнике ABC $\angle C = 3\angle A$. Серединный перпендикуляр ℓ к отрезку AC пересекает отрезок AB в точке D. Биссектриса угла B пересекает ℓ в точке M. Точка E такова, что M — середина отрезка DE. Найдите $\angle EAB$.

5. Натуральное 2025-значное число n таково, что число, образованное любыми 6 его подряд идущими цифрами, делится на 64 (образованные таким образом числа могут начинаться с 0). Докажите, что n делится на 2^{2025}.

6. Саша и Маша играют в игру на полоске из n клеток. На самой левой клетке изначально лежит камень. За ход можно сдвинуть камень либо на 9 вправо, либо на 20 вправо, либо на 10 влево (обязательно оставаясь в пределах полоски). Побеждает тот, после чьего хода камень впервые окажется на самой правой клетке полоски. Найдите все $n \geqslant 100$, при которых кто-нибудь из игроков может действовать так, чтобы гарантированно победить.

7. В четырехугольнике $ABCD$ $\angle BAD = \angle BCD = 90^\circ$. Точки K и M — середины CD и BC соответственно. Точка P на отрезке AM такова, что $\angle ACP = \angle AMC$. Докажите, что $AK = PK$.

8. Вещественные числа a и b удовлетворяют условию

$$ab + \sqrt{ab+1} + \sqrt{a^2+b}\sqrt{a+b^2} = 0.$$

Найдите все значения, которые может принимать выражение

$$b\sqrt{a^2+b} + a\sqrt{b^2+a}.$$