VIII Европейский математический турнир «Связист», 18 – 24 февраля 2025 г.

Командная олимпиада. 6 класс. 19 февраля

1. У Серёжи есть клетчатая доска, длина и ширина которой – последовательные натуральные числа. Таня заметила, что эту доску можно разрезать на прямоугольники 3×5 (которые можно поворачивать). А Маша заметила, что эту доску можно разрезать на прямоугольники 5×7 (которые тоже можно поворачивать). Какие наименьшие размеры могут быть у Серёжиной доски?

2. Капитан команды Вася и его заместитель Петя вышли из коттеджа и вместе пошли на презентацию задач командной олимпиады в корпус, который находится в 600 м от коттеджа. Пройдя 100 м, Вася понял, что забыл в коттедже ручку с тетрадкой и отправил Петю за ними, а сам продолжил идти на презентацию. Петя добежал до коттеджа, мгновенно схватил ручку с тетрадкой и прибежал к месту презентации одновременно с приходом Васи. Во сколько раз скорость бега Пети больше скорости ходьбы Васи, если обе эти величины постоянны?

3. На доске написаны по одному разу все составные числа, не превосходящие 30. Можно ли стереть три из них, а остальные раскрасить в красный, синий и зелёный цвета так, чтобы произведение всех чисел одного цвета было одним и тем же для красных, синих и зелёных чисел?

4. 300 человек, каждый из которых рыцарь или лжец, сели за круглый стол. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Каждый посмотрел на двух ближайших справа и двух ближайших слева и заявил, что среди этих четверых ровно двое — рыцари. Каково наименьшее возможное количество рыцарей, если известно, что хотя бы один рыцарь среди них есть?

5. В клетках таблицы 8×8 расставлены числа 1 и -1 так, что в каждом квадрате 2×2 сумма чисел равна 2 или -2. Докажите, что в таблице есть две строки, в которых стоят одни и те же числа в одном и том же порядке.

6. Обозначим $c(n)$ количество цифр десятичной записи натурального числа n. Какое наибольшее количество различных натуральных чисел можно взять так, чтобы для любых двух разных взятых чисел a и b выполнялось условие

$$c(a+b)+2>c(a)+c(b)?$$

7. В вершинах правильного 100-угольника расставлены все натуральные числа от 1 до 100. Оказалось, что у каждой оси симметрии 100-угольника можно выбрать сторону так, что каждое число, находящееся с этой стороны оси, больше симметричного ему числа (к числам, стоящим на самой оси, это не относится). Сколько существует таких расстановок? Расстановки, отличающиеся поворотом, считаются одинаковыми.

8. У каждого натурального числа от 1 до n посчитали количество натуральных делителей (включая 1 и само число) и полученные результаты сложили. Сумма оказалась количеством всех натуральных делителей числа $n!$. При каких n такое могло произойти?