VIII Европейский математический турнир «Связист», 18 – 24 февраля 2025 г.

Математический бой №4. 5 класс. Гранд-лига. Бой за 1 место
23 февраля.

1. Квадрат разрезали по границам клеток на 5 прямоугольников одинаковой площади. Обязательно ли среди частей найдутся хотя бы 4 прямоугольника с одинаковым периметром?

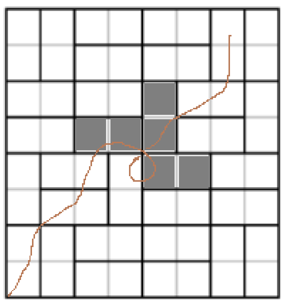
2. На острове живут рыцари (всегда говорят правду) и холопы (всегда врут рыцарям, а холопам говорят правду). В круг встали 100 жителей разного роста. Каждый обратился к соседу справа: житель А сказал "Я выше тебя", его сосед сказал "Я ниже тебя" и т.д, "выше" и "ниже" строго чередовались. Затем каждый обратился к соседу слева: житель Б сказал соседу "Я выше тебя", его сосед "Я ниже тебя" и т.д, "выше" и "ниже" строго чередовались. Сколько рыцарей могло быть в кругу?

3. На доске вначале выписаны числа 1, 2, $\ldots$, 25. За один шаг можно выбрать два числа a и b, где b делится на a, стереть их и выписать частное $\frac{b}{a}$. После нескольких шагов оказалось, что следующий шаг невозможен. Какое наибольшее количество простых чисел может быть среди оставшихся?

4. Ящик конфет разложили в 26 пакетов так, что в них разное *нечётное* число конфет, и в самом маленьком конфет больше половины самого большого. Докажите, что ящик можно было разложить в 25 пакетов так, чтобы в них было разное *чётное* число конфет, и по-прежнему в самом маленьком конфет было больше половины самого большого.

5. 25 шахматистов из 5 стран съехались на турнир. Каждый шахматист сыграл по одной партии со всеми шахматистами из других стран. Каково наименьшее возможное число партий?

6. Сырный остров разбит на 32 двора (см. карту). Микки Маус купил билет для сухопутного путешествия по острову, на нём карта, где дворы с бесплатным сыром отмечены. Правила путешествия: 1. Начать с двора, примыкающего к нижней границе. 2. Пересекая границу между дворами (а можно пересекать и в углу двора), надо попадать во двор, где ты ещё не бывал. 3. Если есть варианты, надо попадать во двор с бесплатным сыром. 4. Тому, кто дойдёт до двора на верхней границе, дают суперприз. У друга Микки Мауса на такой же карте в билете были отмечены другие дворы, и друг сумел пройти хитрым маршрутом (см. рис). Могут ли в карте у Микки дворы быть отмечены так, что без нарушения правил Микки суперприза не получит?



7. В клетках доски 4×4 расставлены натуральные числа так, чтобы в каждой паре клеток, связанных ходом короля, одно число делится на другое. Докажите, что найдутся две клетки, не связанные ходом короля, в которых одно число делится на другое.

8. «В этой фразе $\frac{*}{*}$ от всех цифр — цифры A, $\frac{*}{*}$ от всех цифр — цифры B, $\frac{*}{*}$ от всех цифр — цифры C, а доля всех остальных цифр равна $\frac{*}{*}$». Можно ли вставить вместо A, B и C разные цифры, а вместо $\frac{*}{*}$ — разные несократимые дроби так, чтобы утверждение было верным?

VIII Европейский математический турнир «Связист», 18 – 24 февраля 2025 г.

Математический бой №4. 5 класс. Бой за 3 место.
23 февраля.

1. Квадрат разрезали по границам клеток на 5 прямоугольников одинаковой площади. Обязательно ли среди частей найдутся хотя бы 4 прямоугольника с одинаковым периметром?

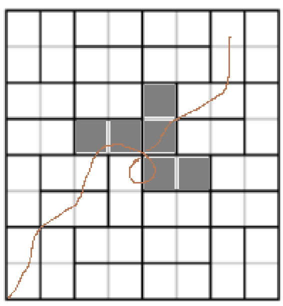
2. На острове живут рыцари (всегда говорят правду) и холопы (всегда врут рыцарям, а холопам говорят правду). В круг встали 100 жителей разного роста. Каждый обратился к соседу справа: житель А сказал "Я выше тебя", его сосед сказал "Я ниже тебя" и т.д, "выше" и "ниже" строго чередовались. Затем каждый обратился к соседу слева: житель Б сказал соседу "Я выше тебя", его сосед "Я ниже тебя" и т.д, "выше" и "ниже" строго чередовались. Сколько рыцарей могло быть в кругу?

3. На доске вначале выписаны числа 1, 2, $\ldots$, 25. За один шаг можно выбрать два числа a и b, где b делится на a, стереть их и выписать частное $\frac{b}{a}$. После нескольких шагов оказалось, что следующий шаг невозможен. Какое наибольшее количество простых чисел может быть среди оставшихся?

4. Ящик конфет разложили в 60 пакетов так, что в них разное нечётное число конфет. Докажите, что его можно было разложить в 25 пакетов так, чтобы в них было разное чётное число конфет.

5. 25 шахматистов из 5 стран съехались на турнир. Каждый шахматист сыграл по одной партии со всеми шахматистами из других стран. Каково наименьшее возможное число партий?

6. Сырный остров разбит на 32 двора (см. карту). Микки Маус купил билет для сухопутного путешествия по острову, на нём карта, где дворы с бесплатным сыром отмечены. Правила путешествия: 1. Начать с двора, примыкающего к нижней границе. 2. Пересекая границу между дворами (а можно пересекать и в углу двора), надо попадать во двор, где ты ещё не бывал. 3. Если есть варианты, надо попадать во двор с бесплатным сыром. 4. Тому, кто дойдёт до двора на верхней границе, дают суперприз. У друга Микки Мауса на такой же карте в билете были отмечены другие дворы, и друг сумел пройти хитрым маршрутом (см. рис). Могут ли в карте у Микки дворы быть отмечены так, что без нарушения правил Микки суперприза не получит?



7. Можно ли в клетки доски 3×9 расставить различные натуральные числа не большие 30 так, чтобы в каждой паре клеток с общей стороной одно число делилось на другое?

8. «В этой фразе $\frac{*}{*}$ от всех цифр — цифры A, $\frac{*}{*}$ от всех цифр — цифры B, $\frac{*}{*}$ от всех цифр — цифры C, а доля всех остальных цифр равна $\frac{*}{*}$». Можно ли вставить вместо A, B и C разные цифры, а вместо $\frac{*}{*}$ — разные несократимые дроби так, чтобы утверждение было верным?

VIII Европейский математический турнир «Связист», 18 – 24 февраля 2025 г.

Математический бой №4. 5 класс. Бои за 5 и 7 место. 23 февраля.

1. Квадрат разрезали по границам клеток на 5 прямоугольников одинакового периметра. Обязательно ли среди частей найдутся хотя бы 4 прямоугольника с одинаковой площадью?

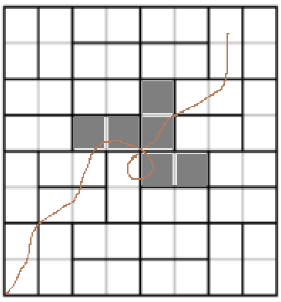
2. На острове живут рыцари (всегда говорят правду) и холопы (всегда врут рыцарям, а холопам говорят правду). В круг встали 100 жителей разного роста. Каждый сказал соседу справа "Я выше тебя", затем сказал соседу слева "Я выше тебя". Сколько рыцарей могло быть в кругу?

3. На доске выписаны числа 1, 2, …, 10. За один шаг можно выбрать два числа a и b, где b делится на a, стереть их и выписать частное $\frac{b}{a}$. После нескольких шагов оказалось, что следующий шаг невозможен. Обязательно ли все оставшиеся числа — простые?

4. Ящик конфет разложили в 60 пакетов так, что в них разное нечётное число конфет. Докажите, что его можно было разложить в 25 пакетов так, чтобы в них было разное чётное число конфет.

5. 25 шахматистов из 5 стран съехались на турнир. Каждый шахматист сыграл по одной партии со всеми шахматистами из других стран. Каково наименьшее возможное число партий?

6. Сырный остров разбит на 32 двора (см. карту). Микки Маус купил билет для сухопутного путешествия по острову, на нём карта, где дворы с бесплатным сыром отмечены. Правила путешествия: 1. Начать с двора, примыкающего к нижней границе. 2. Пересекая границу между дворами (а можно пересекать и в углу двора), надо попадать во двор, где ты ещё не бывал. 3. Если есть варианты, надо попадать во двор с бесплатным сыром. 4. Тому, кто дойдёт до двора на верхней границе, дают суперприз. У друга Микки Мауса на такой же карте в билете были отмечены другие дворы, и друг сумел пройти хитрым маршрутом (см. рис). Могут ли в карте у Микки дворы быть отмечены так, что без нарушения правил Микки суперприза не получит?



7. Можно ли в клетки доски 3×9 расставить различные натуральные числа не большие 30 так, чтобы в каждой паре клеток с общей стороной одно число делилось на другое?

8. «В этой фразе $\frac{*}{*}$ от всех цифр — цифры A, $\frac{*}{*}$ от всех цифр — цифры B, а доля всех остальных цифр равна $\frac{*}{*}$». Можно ли вставить вместо A и B разные цифры, а вместо $\frac{*}{*}$ — дроби (не обязательно разные) так, чтобы утверждение было верным?

VIII Европейский математический турнир «Связист», 18 – 24 февраля 2025 г.

Математический бой №4. 6 класс. Гранд-лига.
23 февраля.

1. На доске написаны 2025 целых неотрицательных чисел (не обязательно различных). Вася может выбрать любое число, вычесть из него 1, а к остальным прибавить по 1. Оказалось, что такими операциями он может превратить числа на доске в 2025 последовательных натуральных чисел. При какой наименьшей сумме исходных чисел это возможно?

2. Клетчатый квадрат 99×99 разрезан на квадраты 1×1, 2×2, $\ldots$, 9×9 (в разрезании есть хотя бы по одному квадрату каждого вида). Назовём линию (строку или столбец) *чётной*, если она пересекает чётное число квадратов разбиения, и *нечётной* в противном случае. Какое наименьшее количество нечётных линий может быть в разрезании?

3. Существуют ли такие 11 различных натуральных чисел, что произведение трёх из них – наибольшего, наименьшего и среднего по величине – равно сумме всех остальных восьми чисел?

4. На доске написано четырёхзначное число. Арним и Брентано по очереди (начинает Арним) ходят по очереди. При своём ходе игрок может заменить число x на доске другим четырёхзначным числом y, у которого в каждом разряде стоит не большая цифра, чем у x, а сумма цифр отличается от суммы цифр x не более, чем на 3. Проигрывает не имеющий хода. Для скольких начальных чисел Арним имеет выигрышную стратегию? (Напомним, что четырёхзначное число не может начинаться с нуля.)

5. Найдите все a такие, что для всякого числа x неравенство $a > x$ выполняется тогда и только тогда, когда выполняется неравенство $a > 0,8x + 405$.

6. Две команды, состоящие из 2025 геймеров каждая, устроили соревнование по компьютерной игре. Каждая из команд заняла комнату с круглым столом, на котором по кругу стоят компьютеры, занумерованные по кругу числами 1, 2, $\ldots$, 2025. Во время игры игрок, сидящий в первой комнате за k-м компьютером, взаимодействует с игроками, сидящими во второй комнате за компьютерами с номерами k, $k+2$, $k+3$ и $k+4$ (но не $k+1$; мы считаем, что после 2025 номера снова идёт первый и т.д.) На второй день команды снова играли в тех же комнатах, и оказалось, что каждый игрок взаимодействует с теми же игроками, что и в первый день. Докажите, что если хотя бы один игрок не сменил компьютер во второй день, то все остались на прежних местах.

7. На плоскости проведены N прямых. Некоторые из них (не менее одной) имеют ровно по пять точек пересечения с проведенными прямыми, а остальные (не менее одной) – ровно по семь точек пересечения. Найдите все значения, которые может принимать N.

8. У натурального числа $n > 10$ есть два различных натуральных делителя a и b таких, что $n = a^2+b$. Докажите, что между числами a и b найдётся ещё хотя бы один делитель числа n.

VIII Европейский математический турнир
«Связист», 18 – 24 февраля 2025 г.

Математический бой №4. 6 – 8 классы. Гранд-лига. Бой за 7 – 8 места. Первая лига.
23 февраля.

1. На доске написаны 2025 целых неотрицательных чисел (не обязательно различных). Вася может выбрать любое число, вычесть из него 1, а к остальным прибавить по 1. Оказалось, что такими операциями он может превратить числа на доске в 2025 последовательных натуральных чисел. При какой наименьшей сумме исходных чисел это возможно?

2. Вася получил задание вырезать из доски 8×8 две клетки, а оставшиеся клетки правильно раскрасить в 2 цвета. Сколькими способами он может это сделать? (В правильной раскраске клетки, имеющие общую сторону, должны быть окрашены в разные цвета.)

3. От трапа самолёта рабочие начали раскатывать ковровую дорожку, и на неё сразу же вступил Почётный Гость. Когда Почётный Гость прошёл по дорожке 15 м, рабочие раскатали дорожку до середины пути от Почётного Гостя до почётного караула. А когда Почётный Гость прошёл ещё 5 м, рабочие закончили раскатывать дорожку у почётного караула. Найдите длину ковровой дорожки.

4. Ящик конфет разложили в 26 пакетов так, что в них разное *нечётное* число конфет, и в самом маленьком конфет больше половины самого большого. Докажите, что ящик можно было разложить в 25 пакетов так, чтобы в них было разное *чётное* число конфет, и по-прежнему в самом маленьком конфет было больше половины самого большого.

5. 25 шахматистов из 5 стран съехались на турнир. Каждый шахматист сыграл по одной партии со всеми шахматистами из других стран. Каково наименьшее возможное число партий?

6. В шести кошельках находятся монеты, по 20 штук в каждом. Все монеты одинаковые по виду, каждая должна весить 50 г, но в одном мешке все монеты фальшивые весом по 49 г, а ещё в одном — фальшивые весом 51 г. Разрешается взять несколько монет из мешков и найти общий вес взятых монет. Можно ли за одно такое действие установить, в каких мешках какие монеты?

7. На олимпиаду надо послать двух теннисистов, играющих в парном разряде. Каждый день тренер формирует из пятнадцати кандидатов две команды по два игрока каждая, и эти команды играют друг с другом. Через несколько дней выяснилось, что каждая возможная пара кандидатов встретилась с каждой возможной другой парой. Через какое наименьшее время это могло произойти?

8. «В этой фразе */* от всех цифр — цифры А, */* от всех цифр — цифры В, а доля всех остальных цифр равна */*». Можно ли вставить вместо А и В разные цифры, а вместо */* — дроби (не обязательно разные) так, чтобы утверждение было верным?

VIII Европейский математический турнир «Связист», 18 – 24 февраля 2025 г.

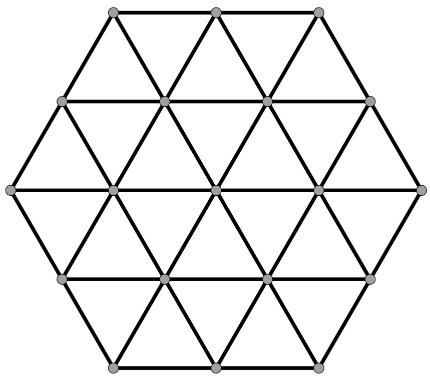
Математический турнир Европы

Математический бой №4. 7 – 8 классы. Гранд-лига. Бой за 1 место. 23 февраля.

1. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $AB + BC = CD = AD$, $\angle B = 2\angle D$. Докажите, что $ABCD$ — трапеция.

2. В треугольнике ABC на сторонах AB, BC и CA выбраны точки D, E и F соответственно так, что треугольник DEF — прямоугольный равнобедренный, причем его гипотенуза EF параллельна AB. Докажите, что точка пересечения биссектрис треугольника ABC лежит внутри четырехугольника $AFEB$.

3. Правильный шестиугольник разбили прямыми, параллельными сторонам, на 24 одинаковых равносторонних треугольника, как показано на рисунке. В каждую из 19 точек, являющихся вершинами треугольников, поставили по натуральному числу от 1 до 19 (числа в разных точках различны). Назовём треугольник разбиения *хорошим*, если его вершины при обходе в порядке возрастания чисел в них идут по часовой стрелке. Каково наименьшее возможное количество хороших треугольников?



4. Обозначим за M множество всех натуральных чисел от 1 до n. Петя и Вася играют в игру. В начале игры у Васи есть пустое множество A. Ребята делают ходы поочередно, начинает Петя. На каждом ходу Петя добавляет в изначально пустой список запрещенных множеств новое подмножество множества M (не совпадающее с M). Вася на каждом своем ходу либо добавляет в A, либо удаляет из A какой-нибудь элемент множества M так, чтобы полученное множество A не оказалось среди запрещенных. Вася выигрывает, если в какой-то момент множество A будет совпадать с M, а Петя старается ему помешать. Может ли Вася обеспечить себе победу?

5. Пусть x, y и z — положительные числа, и пусть $a = x^2(y-z)^4$, $b = y^2(z-x)^4$ и $c = z^2(x-y)^4$. Докажите, что

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 2(ab + bc + ca)$$

6. Алексей написал на доске 2000 последовательных натуральных чисел. После чего разбил их на пары и для каждой из 1000 пар посчитал произведение чисел в ней. И наконец, посчитал разность между самым большим и самым маленьким произведением. Какую наименьшую разность мог получить Алексей?

7. Найдите все тройки натуральных чисел (x, y, z), для которых

$$x^3(1-y) + y^3(x+1) = 2^z$$

при условии, что $y \geqslant x + 3$.

8. Непустое множество S, состоящее из натуральных чисел, таково, что сумма любых двух элементов S тоже лежит в S, и для любого простого p найдётся элемент S, не кратный p. Докажите, что найдётся такое N, что все натуральные числа, большие N, содержатся в S.

VIII Европейский математический турнир «Связист», 18 – 24 февраля 2025 г.

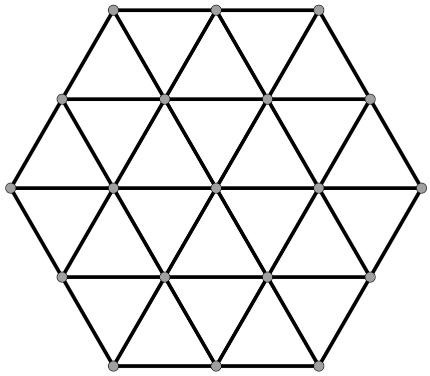
Математический турнир Европы

Математический бой №4. 7 – 8 классы. Гранд-лига. Бои за 3 – 6 места. 23 февраля.

1. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $AB + BC = CD = AD$, $\angle B = 2\angle D$. Докажите, что $ABCD$ — трапеция.

2. По кругу стоят $n \geqslant 4$ мудрецов, каждый из который рыцарь (всегда говорит правду) или лжец (всегда лжет). Каждый знает лишь про себя, рыцарь он или лжец, а про других не знает. Каждому на голову надели колпак черного или белого цвета. Каждый видит цвета всех остальных, а свой не видит. Все мудрецы одновременно произнесли утверждение: «Все колпаки, которые я вижу, одного и того же цвета». Этой информации им оказалось достаточно, чтобы каждый про каждого тут же узнал, рыцарь тот или лжец. Сколько среди них оказалось рыцарей?

3. Правильный шестиугольник разбили прямыми, параллельными сторонам, на 24 одинаковых равносторонних треугольника, как показано на рисунке. В каждую из 19 точек, являющихся вершинами треугольников, поставили по натуральному числу от 1 до 19 (числа в разных точках различны). Назовём треугольник разбиения *хорошим*, если его вершины при обходе в порядке возрастания чисел в них идут по часовой стрелке. Докажите, что хороших треугольников не больше 17.



4. Обозначим за M множество всех натуральных чисел от 1 до n. Петя и Вася играют в игру. В начале игры у Васи есть пустое множество A. Ребята делают ходы поочередно, начинает Петя. На каждом ходу Петя добавляет в изначально пустой список запрещенных множеств новое подмножество множества M (не совпадающее с M). Вася на каждом своем ходу либо добавляет в A, либо удаляет из A какой-нибудь элемент множества M так, чтобы полученное множество A не оказалось среди запрещенных. Вася выигрывает, если в какой-то момент множество A будет совпадать с M, а Петя старается ему помешать. Может ли Вася обеспечить себе победу?

5. Пусть x, y и z — положительные числа, и пусть $a = x^2(y-z)^4$, $b = y^2(z-x)^4$ и $c = z^2(x-y)^4$. Докажите, что

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 2(ab + bc + ca)$$

6. Алексей написал на доске 2000 последовательных натуральных чисел. После чего разбил их на пары и для каждой из 1000 пар посчитал произведение чисел в ней. И наконец, посчитал разность между самым большим и самым маленьким произведением. Какую наименьшую разность мог получить Алексей?

7. Найдите все тройки натуральных чисел (x, y, z), для которых

$$x^3(1-y) + y^3(x+1) = 2^z$$

при условии, что $y \geqslant x + 3$.

8. На столе лежат 26 кучек конфет, во всех кучках их разное **нечетное** количество, причем количество конфет в самой маленькой кучке больше половины от количества конфет в самой большой. Докажите, что можно разложить все конфеты по 25 кучкам так, чтобы в них оказалось разное **чётное** количество конфет, и по-прежнему количество конфет в самой маленькой кучке было больше половины от количества конфет в самой большой.