VIII Европейский математический турнир «Связист», 18 – 24 февраля 2025 г.

Математический турнир Европы

Математический бой №3. 5 класс. Гранд-лига.
22 февраля.

1. Каждая грань кубика Рубика $3 \times 3 \times 3$ разбита на 9 одинаковых квадратиков, в которых проведены обе диагонали. Муравей ползает только по этим диагоналям (но может поворачивать в центрах клеток). Его маршрут прошёл по разу через каждую из вершин квадратиков. Докажите, что есть центр квадратика, в котором муравей побывал больше одного раза.

2. Саша выбрала 5 двузначных чисел, где наибольшее число не больше удвоенного наименьшего. Приставив их друг к другу в ряд без пробелов, Саша получила 10-значное число N, где все цифры различны. Каково наибольшее возможное N?

3. Есть три куска сыра весом $2,5$ кг, 3 кг и X кг. Разрешается разрезать один кусок на две части. Можно разрезать так, чтобы потом разложить весь сыр на две равные по весу кучки. А можно разрезать иначе, после чего разложить весь сыр на три равные по весу кучки. Чему может быть равен X?

4. В клетки таблицы 2×6 (2 — высота) расставлены двенадцать различных натуральных чисел. Произведения чисел в каждом квадратике 2×2 одно и то же. Могут ли суммы чисел в обеих строках оказаться равными?

5. На острове живут два племени: лжецы (всегда лгут) и рыцари (всегда говорят правду). Группу жителей острова разбили на пары и спросили "Твой напарник одного с тобой племени?". В 25 парах ответы не совпали. На вопрос "Твой напарник — рыцарь?" 200 человек ответили "Да". Сколько жителей участвовали в опросе?

6. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. Дан серый клетчатый квадрат 6×6. За ход надо покрасить серую клетку в белый или чёрный цвет. Игра заканчивается, когда все клетки покрашены. Если найдётся квадрат 2×2, покрашенный в шахматном порядке, победит Петя, иначе Вася. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник?

7. Заяц и волк получили по корзине с одинаковым количеством орехов. Заяц разложил орехи из своей корзины на 12 пеньков поровну, а остаток (меньше 12) — съел. Волк разложил часть орехов из своей корзины на другие 13 пеньков поровну, а остальные (их было больше 13) — положил себе в карман. После того, как волк положил себе в карман ещё и все орехи с одного пенька зайца, у него в кармане стало 100 орехов. Сколько орехов съел заяц?

8. На экране компьютера написано число 1111111112025. Какое наименьшее количество цифр можно стереть так, чтобы оставшееся число разделилось на 72?

VIII Европейский математический турнир «Связист», 18 – 24 февраля 2025 г.

Математический турнир Европы

Математический бой №3. 6 класс. Гранд-лига.
22 февраля.

1. Дан набор из 20 различных действительных чисел. Известно, что для любых двух чисел a и b ($a < b$) из набора найдётся некоторое число x из этого же набора, такое, что $a < -x < b$. Какое количество положительных чисел может быть в таком наборе?

2. На доске написано число 2. Если на доске есть число n^2, где n – любое натуральное число, то можно выписать на доску число n. Если на доске есть натуральное число n, то можно выписать на доску число $(n + 5)^2$. Сколько разных натуральных чисел, не превосходящих 1000, можно выписать на доску?

3. У Тани есть карандаши 15 разных цветов. Используя эти карандаши, она отметила на окружности 2025 различных точек. Затем Маша соединила некоторые пары одноцветных точек отрезками, не имеющими общих точек (даже концов). За каждый отрезок Таня дала Маше конфету. Какое наибольшее количество конфет Маша гарантированно сможет получить?

4. На карточках написаны числа от 1 до 50. Арним ставит перед каждым из этих чисел знак $+$ или $-$. Затем Брентано и Арним по очереди (начинает Брентано) забирают себе по одной карточке. Когда все карточки разобраны, каждый находит модуль суммы чисел на своих карточках (если сумма равна S, то её модуль равен S при $S \geqslant 0$ и $-S$ при $S < 0$). Арним выигрывает, если модуль суммы чисел на его карточках оказался больше. В противном случае выигрывает Брентано. Кто выиграет при правильной игре?

5. При каком наибольшем натуральном N можно раскрасить клетки таблицы $N \times N$ в чёрный и белый цвета так, чтобы ни для каких двух строк и двух столбцов четыре клетки, стоящие на их пересечении, не были одного цвета?

6. Какое наибольшее число групп можно составить из натуральных чисел от 1 до 100, чтобы в каждой группе наибольшее число равнялось произведению всех остальных чисел группы? (Каждое число можно поместить не более чем в одну группу.)

7. Равносторонний треугольник со стороной 999 разделён на равносторонние треугольнички со стороной 1 прямыми, параллельными его сторонам. Вершины треугольничков раскрашены в красный и синий цвета. Синих точек всего 750. Докажите, что существует отрезок с синими концами, параллельный стороне треугольника.

8. Докажите, что каждое натуральное число является средним арифметическим некоторого набора (не обязательно различных) квадратов натуральных чисел.

VIII Европейский математический турнир «Связист», 18 – 24 февраля 2025 г.

Математический турнир Европы

Математический бой №3. 6 – 8 классы. Первая лига
22 февраля.

1. Дан набор из 20 различных действительных чисел. Известно, что для любых двух чисел a и b ($a < b$) из набора найдётся некоторое число x из этого же набора, такое, что $a < -x < b$. Какое количество положительных чисел может быть в таком наборе?

2. На доске написано число 2. Если на доске есть число n^2, где n – любое натуральное число, то можно выписать на доску число n. Если на доске есть натуральное число n, то можно выписать на доску число $(n+5)^2$. Сколько разных натуральных чисел, не превосходящих 1000, можно выписать на доску?

3. По Биг-Бену до полудня оставалось вдвое меньше времени, чем по часам Джеймса Бонда. А через два часа уже по часам Бонда до полудня оставалось в двадцать три с половиной раза меньше времени, чем по Биг-Бену. На сколько часы Бонда отстают от Биг-Бена?

4. Дан серый клетчатый квадрат 6×6. За ход надо покрасить серую клетку в белый или чёрный цвет. Игра заканчивается, когда все клетки покрашены. Если найдётся квадрат 2×2, покрашенный в шахматном порядке, победит Петя, иначе Вася. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник?

5. Группу жителей острова, где живут два племени: рыцарей (всегда говорят правду) и лжецов (всегда лгут) разбили на пары и спросили "Твой напарник одного с тобой племени?". В 25 парах ответы не совпали. На вопрос "Твой напарник — рыцарь?"200 человек ответили "Да". Сколько жителей участвовали в опросе?

6. В плей-офф хоккейного чемпионата вышли 16 команд. 11 из них представляют европейские города, а остальные – азиатские. В каждом туре команды разбиваются на пары, играют, и проигравшая коменда выбывает. В каком наибольшем количестве туров могут между собой играть европейская команда с азиатской?

7. Назовем число, некратное 10, в записи которого есть только цифры $0, 1, 4, 9$ (причем все эти цифры присутствуют) — *квадратнозначным.* Может ли произведение двух квадратнозначных чисел быть квадратнозначным?

8. Докажите, что каждое натуральное число является средним арифметическим некоторого набора (не обязательно различных) квадратов натуральных чисел.

Математический турнир Европы

VIII Европейский математический турнир «Связист», 18 – 24 февраля 2025 г.

Математический бой №3. 7 – 8 классы. Гранд-лига. 22 февраля.

1. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $AB = AC$, $\angle BAC = 2\angle DAC$, $\angle ACD = \angle CBD$. Найдите $\angle CBD$.

2. Дан выпуклый n-угольник $A_1A_2\dots A_n$. Для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$ диагонали A_iA_{i+2} и $A_{i-1}A_{i+1}$ пересекаются в точке B_i (подразумевается, что $A_0 = A_n$, $A_{-1} = A_{n-1}$, $A_{n+1} = A_1$, $A_{n+2} = A_2$). Докажите, что сумма длин отрезков A_iB_i меньше периметра исходного n-угольника.

3. Дан полный граф на n вершинах, изначально ни одно его ребро не покрашено. Алиса и Боб играют в следующую игру. Каждую минуту Алиса указывает на ребро, которое ещё не покрашено, а Боб красит его в красный или синий цвет по своему выбору. Боб выигрывает, если после того, как все рёбра будут покрашены, найдётся вершина, соединённая со всеми остальными рёбрами красного цвета, но в более ранний момент такой вершины не найдётся. Если же такая вершина найдётся раньше, или не найдётся вообще — выигрывает Алиса. При каких n Боб сможет выиграть вне зависимости от действий Алисы?

4. При каком наибольшем натуральном N можно раскрасить все клетки таблицы $N \times N$ в чёрный и белый цвета так, чтобы ни для каких двух строк и столбцов четыре клетки, стоящие на их пересечении, не были одного цвета?

5. Упростите выражение

$$\left\lfloor \frac{n^2}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n^2}{2} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{n^2}{n} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n^2}{n+1} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n^2}{n+2} \right\rfloor - \ldots - \left\lfloor \frac{n^2}{n^2} \right\rfloor.$$

Напоминаем, что через $\lfloor x \rfloor$ обозначается целая часть числа x, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x.

6. Последовательность рациональных чисел $a_1, a_2, a_3, \dots$ такова, что

$$a_n = \frac{1 + a_{n-1}}{a_{n-2}}$$

для $n \geqslant 3$. Известно, что произведение $a_1a_2a_3\dots a_{2025}$ — целое. Докажите, что это произведение является кубом целого числа.

7. Назовем число, некратное 10, в записи которого есть только цифры $0, 1, 4, 9$ (причем все эти цифры присутствуют) — *квадратнозначным.* Может ли произведение двух квадратнозначных чисел быть квадратнозначным?

8. Натуральное $k > 1$ называется *несущественным*, если для любых натуральных m и n верно следующее утверждение: «Если $km + n$ делится на $kn + m$, то m делится на n.» Найдите все несущественные числа.