VIII Европейский математический турнир «Связист», 18 – 24 февраля 2025 г.

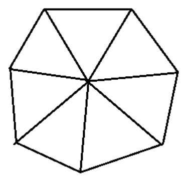
Математический бой №2. 5 класс. Гранд-лига.
21 февраля.

1. На скамейке у реки сидят в ряд 9 гномов. Есть двухместная лодка, а река бурная. Все готовы плыть вдвоем с соседом по скамейке, а самый левый и самый правый гномы — сильные, они ещё готовы плыть и в одиночку. Какое наибольшее число гномов может одновременно оказаться на другом берегу?

2. Число 2025 представлено как сумма неоднозначных палиндромов. Каково наибольшее количество слагаемых?

3. Жук, паук и таракан ползают с постоянными скоростями по контуру прямоугольника $ABCD$, где $AB = 2BC$. Они стартовали одновременно из A: жук и паук в направлении B, а таракан — в направлении D. Таракан впервые встретил жука в точке B через 8 мин после старта. А паука таракан впервые встретил в середине отрезка AB. Докажите, что когда-то все трое встретятся в одной точке и определите, через сколько минут после старта первая такая встреча произойдёт.

4. Крышку стола в виде 7-угольника разбили на треугольники, соединив вершины с центром (см. рис.). В каждую вершину и в центр положили по подарку: шоколадку, мармеладку или тетрадку (всего 8 подарков). Известно, что в вершинах каждого треугольника есть хотя бы одна шоколадка и хотя бы одна мармеладка, но всего шоколадок меньше чем тетрадок. Сколько всего шоколадок и где они лежат?



5. Петя и Вася играют. Сначала Петя выписывает в ряд в любом порядке все натуральные числа от 5 до 2025, не делящиеся на 4. Затем Вася должен вставить во все промежутки между числами знаки действий, при этом два из них — умножение, а остальные — плюсы и минусы. Если результат делится на 4, выигрывает Вася, иначе – Петя. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник?

6. На плоскости провели 10 прямых, некоторые жирные, остальные тонкие. Ни через какую точку не проходят три или более прямых. Точек пересечения двух жирных прямых столько же, сколько точек пересечения двух тонких. Может ли жирных и тонких прямых быть не поровну?

7. В клетки таблицы 6×6 расставили цифры от 1 до 9, каждую по 4 раза. Клетки с одинаковыми цифрами не соприкасаются ни стороной, ни вершиной. Обязательно ли найдётся ряд из 6 клеток (столбец, строка или диагональ), в котором произведение чисел оканчивается на 0?

8. Можно ли поверхность куба с ребром 1 дм оклеить (без дыр и наложений) четырьмя равными фигурами периметром 1 м? (Фигуры равные, если они совмещаются при наложении друг на друга.)

Математический турнир Европы

VIII Европейский математический турнир «Связист», 18 – 24 февраля 2025 г.

Математический бой №2. 6 класс. Гранд-лига.
21 февраля.

1. Джинн расположил в ряд 21 кучу, в которых лежат 1, 2, 3, . . . , 21 алмазов (порядок куч джинн выбирает сам). Аладдин может забрать любые четыре кучи, лежащие подряд. Какое наибольшее количество алмазов Аладдин сумеет гарантированно забрать?

2. Герман и Макс по очереди делают ходы в следующей игре. Первым ходом Макс называет нечётное натуральное число. При каждом следующем своём ходе он должен назвать нечётное натуральное число, большее того, которое он называл на предыдущем ходу. Герман каждым своим ходом называет точный квадрат, который не меньше суммы всех чисел, названных Максом до этого. Макс хочет добиться того, чтобы после очередного его хода сумма всех названных им чисел оказалась меньше, чем последнее число, которое назвал Герман. Герман хочет помешать Максу. Удастся ли Максу достичь своей цели или Макс сможет всегда ему мешать?

3. На окружности отмечены 24 точки, которые разбивают её на равные дуги. Для какого наибольшего k существует выпуклый k-угольник с вершинами в отмеченных точках, никакие две стороны которого не параллельны? (Для точек A, B, C и D, расположенных на окружности в таком порядке, отрезки AB и CD параллельны, если между A и D заключено столько же дуг, сколько между B и C.)

4. В гонке по круговому стадиону участвуют 10 велосипедистов. Все они едут в одну сторону с разными скоростями, стартуют одновременно из одной точки и финишируют одновременно в той же самой точке. Во время гонки (за исключением старта и финиша) велосипедисты никогда не оказываются более чем вдвоем в одной точке. У самого быстрого из них изначально есть фляга с водой. Когда велосипедист с флягой оказывается в одной точке с другим велосипедистом — он передает ему флягу. Суммарно велосипедисты проехали по стадиону 10000 кругов. Докажите, что фляга проехала ровно 1000 кругов.

5. Можно ли раскрасить некоторые десять последовательных натуральных чисел в красный и зелёный цвета так, чтобы произведение всех красных чисел было равно произведению всех зелёных?

6. 45 детям раздали 2025 карандашей так, что количества полученных ими карандашей оказались 45 последовательными натуральными числами. Время от времени какой-нибудь ребёнок раздаёт по одному карандашу остальным 44 детям. Какое наибольшее количество карандашей может оказаться у одного ребёнка в результате этих операций?

7. На празднике было 100 гостей. В 22.00 ушли все, у кого на празднике не было ни одного знакомого; в 22.01 – все, у которого остался ровно один знакомый; в 22.02 – все, у кого осталось ровно двое знакомых и т.д., наконец, в 23.39 ушли те, у кого к этому моменту осталось ровно 99 знакомых. Сколько людей могло остаться на празднике в 23.40? Укажите все значения.

8. Из квадратной доски 7×7 вырезали некоторые клетки четвёртой горизонтали, а всё остальное разрезали на уголки из трёх клеток. Найдите все возможные наборы вырезанных клеток.

VIII Европейский математический турнир
«Связист», 18 – 24 февраля 2025 г.

Математический бой №2. 6 – 8 классы. Первая лига
21 февраля.

1. Джинн расположил в ряд 21 кучу, в которых лежат 1, 2, 3, . . . , 21 алмазов (порядок куч джинн выбирает сам). Аладдин может забрать любые четыре кучи, лежащие подряд. Какое наибольшее количество алмазов Аладдин сумеет гарантированно забрать?

2. Имеется 6 дисков разного диаметра: 35, 30, 25, 20, 15 и 10 см. Они сложены в три стопки. В первой стопке — один диск в 10 см. Во второй — два: снизу 30 и на нём 20 см. В третьей три: 35, 25 и 15. За одно перекладывание можно снять один диск из любой стопки и переложить его на другую стопку, если там сверху лежит более широкий диск или стопка пустая. За какое наименьшее количество перекладываний можно собрать все диски в одну стопку?

3. На каждой грани игрового кубика должна стоять одна из цифр: 1, 2 или 3, причём каждая цифра должна стоять на двух гранях. Сколько существует различных игровых кубиков? (Кубики считаются одинаковыми, если их можно совместить так, что цифры на всех гранях совпадут).

4. У часов есть часовая и минутная стрелки. Ровно в полночь две мухи сели на эти стрелки. Если стрелки совпадают друг с другом, мухи перелетают со своей стрелки на другую и продолжает движение на ней. Сколько полных оборотов сделает за сутки каждая муха?

5. Число на доске можно умножить на правильную дробь и получить другое целое число. Затем операцию повторить с новым числом и т.д. Сколько раз это можно сделать, если сначала на доске написано 2025?

6. Из квадратной доски 7×7 вырезали одну клетку. Оказалось, что оставшуюся доску можно разрезать как на прямоугольники 1×3, так и на прямоугольники 1×4. Какую клетку вырезали?.

7. На празднике было 100 гостей. В 22.00 ушли все, у кого на празднике не было ни одного знакомого; в 22.01 – все, у которого остался ровно один знакомый; в 22.02 – все, у кого осталось ровно двое знакомых и т.д., наконец, в 23.39 ушли те, у кого к этому моменту осталось ровно 99 знакомых. Могло в 23.40 на праздникео статься 99 гостей?

8. Петя написал на доске 4 цифры и составил, переставляя их в разном поряде все возможные четырёхзначные числа, которых оказалось всего 9 штук. Сумма всех составленных чисел оказалась равна 28 998. Какие цифры записал Петя на доске?

VIII Европейский математический турнир «Связист», 18 – 24 февраля 2025 г.

Математический турнир Европы

Математический бой №2. 7 – 8 классы. Гранд-лига.
21 февраля.

1. В треугольнике ABC $\angle ABC = 10^\circ$, а точка D на стороне AB такова, что $AD = AC$ и $\angle ADC = 20^\circ$. Точка E такова, что $BE = AC$ и $BE \parallel CD$. Отрезки AE и BC пересекаются в точке F. Найдите $\angle FDC$.

2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Точка M на отрезке OA и точка N на отрезке OD выбраны так, что $MN \parallel AD$ и $NC \parallel AB$. Докажите, что $\angle ABM = \angle NCD$.

3. На турнир приехали 2025 теннисистов. После того, как было проведено 2000 игр, оказалось, что каждый из теннисистов сыграл хотя бы одну игру. При каком наибольшем k можно заведомо утверждать, что найдутся k игр, все $2k$ участников которых различны?

4. В гонке по круговому стадиону участвуют n велосипедистов. Все они едут с разными скоростями, стартуют одновременно из одной точки и финишируют одновременно в той же самой точке. Во время гонки (за исключением старта и финиша) велосипедисты никогда не оказываются более чем вдвоем в одной точке. У самого быстрого из них изначально есть фляга с водой. Когда велосипедист с флягой оказывается в одной точке с другим велосипедистом — он передает ему флягу. Суммарно велосипедисты проехали по стадиону $1000n$ кругов. Докажите, что фляга проехала ровно 1000 кругов.

5. Герман и Макс по очереди делают ходы в следующей игре. Первым ходом Макс называет нечётное натуральное число. При каждом следующем своём ходе он должен назвать нечётное натуральное число, большее того, которое он называл на предыдущем ходу. Герман каждым своим ходом называет точный квадрат, который не меньше суммы всех чисел, названных Максом до этого. Макс хочет добиться того, чтобы после очередного его хода сумма всех названных им чисел оказалась меньше, чем последнее число, которое назвал Герман. Герман хочет этого не допустить. Удастся ли Максу достичь своей цели?

6. Положительные числа a, b и c таковы, что $a + 2b + 3c = \sqrt{13}$. Докажите, что

$$\sqrt{a^2+1} + 2\sqrt{b^2+1} + 3\sqrt{c^2+1} \geqslant 7.$$

7. Оля выписала на доску несколько различных натуральных делителей числа 2025^{2025}. Для каждой пары чисел на доске Дима записал в тетрадь их НОД. Оказалось, что нет чисел, записанных одновременно и на доске, и в тетради. Какое наибольшее количество чисел могла выписать Оля?

8. Найдутся ли различные нечётные простые p, q и r такие, что $p(p+1) + q(q+1) = r(r+1)$?