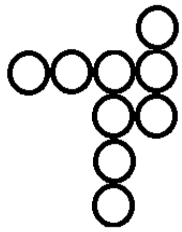
VIII Европейский математический турнир «Связист», 18 – 24 февраля 2025 г.

Математический турнир Европы

Математический бой №1. 5 класс. Гранд-лига.
20 февраля.

1. Удалось найти решение ребуса ПО:КУ=КУ:ЕШ=Ь. Чему может быть равен Ь? (Как обычно, разные буквы обозначают разные цифры, одинаковые — одинаковые.)

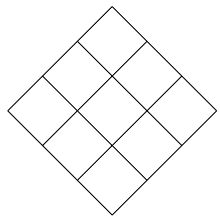
2. На столе лежат 9 одинаковых с виду монет (см. рис), из них 7 настоящие, а 2 фальшивые. Настоящие весят одинаково, фальшивые тоже, но фальшивые легче настоящих. Известно, что фальшивые монеты касаются друг друга. Как найти обе фальшивые монеты за два взвешивания на двухчашечных весах без гирь?



3. На шахматной доске стоит несколько королей. Ровно половина из них бьёт кого-нибудь по горизонтали, ровно половина из них бьёт кого-нибудь по вертикали и ровно половина из них бьет кого-нибудь по диагонали. Обязательно ли число королей делится на 4? (Короли бьют друг друга, если стоят в клетках с общей стороной или вершиной.)

4. Четыре фирмы выпускают шоколад без выходных, каждый день наращивая производство. Вторая фирма каждый день выпускала на 2 плитки больше, чем первая фирма вчера. Третья фирма — на 3 плитки больше, чем вторая вчера. Четвёртая фирма — на 4 плитки больше, чем третья вчера. Первая фирма — на 1 плитку больше, чем четвёртая вчера. 1 июня каждая фирма выпустила по 1000 плиток. А по сколько плиток выпустила каждая из фирм 1 марта того же года?

5. В таблице размером 3×3, повёрнутой на 45 градусов (см. рис.) записаны различные натуральные числа, не превосходящие N. Для любых двух чисел, стоящих в соседних клетках (имеющих общую сторону), выполняется условие, что верхнее делится на нижнее. При каком наименьшем N такое возможно?



6. На острове живут два племени: лжецы (всегда лгут) и рыцари (всегда говорят правду). В круг встали 88 жителей. Каждый ответил «Да» или «Нет» на вопрос «Правда ли, что у тебя есть сосед–лжец?». Ответов «Нет» оказалось столько же, сколько лжецов. Какое наибольшее число рыцарей может быть в круге?

7. В группе из 5 студентов проводились измерения веса, при каждом взвешивании участвовали двое. В результате было получено 10 значений (в кг): 103, 115, 116, 117, 118, 124, 125, 130, 137, 139. Каков вес *третьего по тяжести* студента?

8. Можно ли клетчатый квадрат 8×8 разрезать по границам клеток на 25 фигур одинакового периметра?

VIII Европейский математический турнир «Связист», 18 – 24 февраля 2025 г.

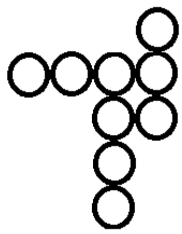
Математический бой №1. 6 класс. Гранд-лига.
20 февраля.

1. Аля пишет на доске 20-значное число, в котором встречаются не менее 9 разных цифр. Федя выписывает на бумажку все числа, которые можно получить, вычеркнув из алиного числа 18 цифр, и за каждое получившееся простое число Аля даёт ему конфету. (Одно и то же простое число может получаться несколько раз, и за каждый способ его получить Феде полагается отдельная конфета; запись простого числа может начинаться с нуля, так, 03 считается простым). Какое наименьшее количество конфет может получить Федя?

2. В городе три школы A, B и C, в каждой из которых есть хотя бы один ученик. Известно, что, как бы ни выбрать по одному ученику из каждой школы, среди выбранных трёх учеников найдутся двое знакомых и двое незнакомых. Докажите, что верно хотя бы одно из следующих трёх утверждений: (1) существует ученик школы A, который знает всех учеников B; (2) существует ученик школы B, который знает всех учеников C; (3) существует ученик школы C, который знает всех учеников A.

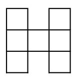
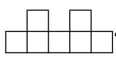
3. Маша написала на доске 300 положительных чисел (не обязательно различных). Сумма всех чисел 2102, и для каждого натурального $n \leqslant 300$ на доске есть n чисел, сумма которых – натуральное число. Найдите наименьшее возможное значение самого большого числа.

4. На столе лежат 9 одинаковых с виду монет (см. рисунок), из них 7 настоящие, а 2 фальшивые. Настоящие весят одинаково, фальшивые тоже, но фальшивые легче настоящих. Известно, что фальшивые монеты касаются друг друга. Можно ли найти обе фальшивые монеты за два взвешивания на двухчашечных весах без гирь?



5. На бесконечной белой клетчатой плоскости конечное число клеток покрашено в черный цвет. Каждую секунду каждая клетка перекрашивается в цвет, который преобладает в квадрате 10×10, для которого она является левым нижним углом (не считая самой этой клетки). Верно ли, что рано или поздно все черные клетки неминуемо исчезнут?

6. При каком наибольшем n все натуральные числа от 1 до n можно разбить на две группы так, чтобы никакие два разных числа, попавших в одну группу, не давали в сумме точный квадрат?

7. Можно ли разрезать клетчатый квадрат 777×777 на фигуры вида  и ? Фигуры можно поворачивать.

8. Натуральные числа x_1, x_2, $\ldots$, x_{2024} таковы, что значения всех 1012 дробей $\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_3}{x_4}, \ldots, \frac{x_{2023}}{x_{2024}}$ различны. Какое наименьшее количество разных чисел может быть среди чисел x_1, x_2, $\ldots$, x_{2024}?

Математический турнир Европы

VIII Европейский математический турнир «Связист», 18 – 24 февраля 2025 г.

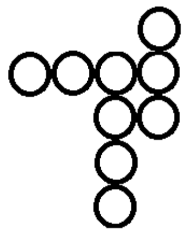
Математический бой №1. 6 – 8 классы. Первая лига
20 февраля.

1. Аля пишет на доске 20-значное число, в котором встречаются не менее 9 разных цифр. Федя выписывает на бумажку все числа, которые можно получить, вычеркнув из алиного числа 18 цифр, и за каждое получившееся простое число Аля даёт ему конфету. (Одно и то же простое число может получаться несколько раз, и за каждый способ его получить Феде полагается отдельная конфета; запись простого числа может начинаться с нуля, так, 03 считается простым). Какое наименьшее количество конфет может получить Федя?

2. В играх по олимпийской системе играют 16 команд. В каждом туре команды разбиваются на пары, и проигравшая команда выбывает. Перед турниром командам присвоены различные рейтинги —- натуральные числа от 1 у самой слабой, до 16 у самой сильной. Если рейтинги команд в игре отличаются более чем на 2, выигрывает сильнейшая. Какая наибольшая разница рейтингов может быть у команд, вышедших в финал?

3. На бесконечной белой клетчатой плоскости конечное число клеток покрашено в черный цвет. Каждую секунду каждая клетка перекрашивается в цвет, который преобладает в квадрате 2×2, для которого она является левым-нижним углом (не считая самой этой клетки). Верно ли, что рано или поздно все черные клетки неминуемо исчезнут?

4. На столе лежат 9 одинаковых с виду монет (см. рисунок), из них 7 настоящие, а 2 фальшивые. Настоящие весят одинаково, фальшивые тоже, но фальшивые легче настоящих. Известно, что фальшивые монеты касаются друг друга. Можно ли найти обе фальшивые монеты за два взвешивания на двухчашечных весах без гирь?



5. Каким может быть число АНАНАС, если и оно, и число БАНАН делятся на 8? Здесь цифры заменены буквами, разные — разными, одинаковые — одинаковыми. Найдите все ответы.

6. Можно ли все натуральные числа от 1 до 100 разбить на две группы так, чтобы никакие два разных числа, попавших в одну группу, не давали в сумме точный квадрат?

7. Найдите такое наименьшее натуральное число N, что, на какое бы двузначное число его ни умножить, сумма цифр произведения будет равна сумме цифр числа N.

8. Натуральные числа $x_1, x_2, \ldots, x_{30}$ таковы, что значения всех 15 дробей $\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_3}{x_4}, \ldots, \frac{x_{29}}{x_{30}}$ различны. Какое наименьшее количество разных чисел может быть среди чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{30}$?

VIII Европейский математический турнир «Связист», 18 – 24 февраля 2025 г.

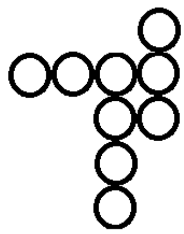
Математический бой №1. 7 – 8 классы. Гранд-лига.
20 февраля.

1. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ $AB = 3$, $BC = 4$, $AC = 2$, $DE = 5$. Докажите, что $BD + BE > 10$.

2. В треугольнике ABC $\angle B = 60^\circ$, и на биссектрисе угла B внутри треугольника выбрана точка D. Луч CD пересекает AB в точке E, луч AD пересекает BC в точке F. Оказалось, что $AD = BD$ и $AE = CF$. Докажите, что треугольник ABC — равносторонний.

3. На бесконечной белой клетчатой плоскости конечное число клеток покрашено в черный цвет. Каждую секунду каждая клетка перекрашивается в цвет, который преобладает в квадрате 100×100, для которого она является левым-нижним углом (не считая самой этой клетки). Верно ли, что рано или поздно все черные клетки неминуемо исчезнут?

4. На столе лежат 9 одинаковых с виду монет (см. рисунок), из них 7 настоящие, а 2 фальшивые. Настоящие весят одинаково, фальшивые тоже, но фальшивые легче настоящих. Известно, что фальшивые монеты касаются друг друга. Можно ли найти обе фальшивые монеты за два взвешивания на двухчашечных весах без гирь?



5. Сто фирм выпускают шоколадки. Каждый день каждая фирма выбирает себе *конкурента* среди остальных. Конкурентом каждой фирмы становится любая из фирм, выпускающих минимальное количество шоколадок, большее, чем эта фирма. Если же фирма выпускает больше всех шоколадок, то её конкурентом становится любая из фирм, выпускающая минимальное количество шоколадок. После чего все фирмы увеличивают своё производство на количество шоколадок, производимое своим конкурентом. Оказалось, что спустя k дней все фирмы впервые стали производить поровну шоколадок. Чему может быть равно k?

6. Для положительных a, b и c докажите, что

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \sqrt{\frac{c}{a+b+c}} \geqslant 1.$$

7. Целые числа a, b и c таковы, что $ab + bc + ca = 1$. Известно, что $a + b + c - abc = 2p$, где p — простое. Найдите p.

8. Можно ли разделить числа $1, 2, \ldots, 100$ на два множества так, чтобы количества нечётных чисел в множествах были равны и сумма квадратов чисел в первом множестве отличалась от суммы квадратов чисел во втором множестве на 16?