Математический турнир Европы

VIII Европейский математический турнир «Связист», 18 – 24 февраля 2025 г.

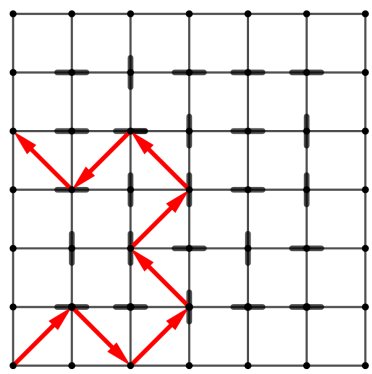
Личная олимпиада. 7 – 8 классы. 24 февраля

Довывод.

1. В миске лежат 100 кусочков корма. За день кошка Кайя может съесть 3, 4 или 5 кусочков. При этом она не может есть одно и то же количество кусочков два дня подряд. Какое наименьшее количество дней понадобится Кайе, чтобы сделать миску пустой?

2. Пусть $ABCD$ — квадрат, а M — середина BC. Пусть X и Y — точки на отрезках AB и CD соответственно. Докажите, что $\angle XMY = 90^\circ$ тогда и только тогда, когда $BX + CY = XY$.

3. Из левого нижнего угла доски 100×100 под углом 45° выпущен луч лазера. В каждом внутреннем узле доски расположено вертикальное или горизонтальное зеркало. Луч отражается от краев доски и от зеркал по правилу «угол падения равен углу отражения» (при попадании в любой из углов доски луч прекращает движение). Докажите, что луч обязательно попадет либо в левый верхний, либо в правый нижний угол доски.



4. Найдите все тройки натуральных чисел (a, b, c), больших 1, для которых число abc дает остаток a при делении на a^2, остаток b при делении на b^2 и остаток c при делении на c^2.

Личная олимпиада. 7 – 8 классы. 24 февраля

Вывод.

5. В треугольнике ABC основание H высоты из точки A лежит на стороне BC. Точки M, K, N — середины отрезков BH, AH, CH соответственно. Оказалось, что $\angle BKC + \angle MAN = 180^\circ$. Найдите $\angle BAC$.

6. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{b+a} + \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} > 2.$$

7. В каждой клетке доски $2n \times 2n$ стоит рыцарь или лжец. Каждый из них утверждает, что рыцарей в его столбце меньше, чем лжецов в его строке (и там, и там — не считая его самого). Каково наибольшее возможное количество рыцарей на доске?