VII Европейский математический турнир «Покровское», 27 февраля – 4 марта 2024 г.

Математический турнир Европы

Командная олимпиада. 7 – 8 классы. Решения. 28 февраля

1. *Дима, Оля и кошка Кайя переклеивают обои в комнате. Дима и Кайя вместе могут справиться с работой ровно за 10 дней, Дима и Оля — ровно за 5 дней, а в одиночку Кайя управится ровно за 15 дней. Весь понедельник и вторник Оля и Кайя клеили обои вдвоём. Всю среду они работали уже втроём, вместе с Димой. Но начиная с четверга Кайя разленилась, и Оле с Димой пришлось доклеивать обои вдвоём. В какой день недели закончится работа по поклейке обоев?*

Ответ. В пятницу. **Решение.** Пусть поклейка всех обоев равна 30 единицам работы (е.р.). Тогда Кайя за день проделывает 2 е.р., Дима — 1 е.р., а Оля — 5 е.р. В таком случае, за первые три дня будет проделано $2(5 + 2) + (5 + 2 + 1) = 22$ е.р., и оставшиеся 8 е.р. Оля и Дима выполнят за $4/3$ дня, т.е. больше одного (не успеют закончить в четверг), но меньше двух (т.е. закончат в пятницу).

2. *Шесть шестизначных чисел получаются друг из друга циклическим сдвигом шести различных ненулевых цифр: $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$, $\overline{a_2a_3a_4a_5a_6a_1}$, …, $\overline{a_6a_1a_2a_3a_4a_5}$. Какое наибольшее значение может принимать наибольший общий делитель всех шести чисел?*

Ответ. 142857. **Решение.** Обозначим наибольший общий делитель всех чисел через n. Заметим, что среди цифр a_1, a_2, a_3 ,a_4, a_5 и a_6 есть либо единица, либо две взаимно простые цифры. Пусть, не умаляя общности, одна из них a_1. Обозначим число $\overline{a_2a_3a_4a_5a_6}$ через x. Тогда по условию $a_1 \cdot 10^5 + x$ делится на n и $10x + a_1$ делится на n. Умножим первое на 10 и вычтем второе. Получим, что $a_1(10^6 - 1)$ делится на n. Аналогичными рассуждениями получаем, что каждая из цифр a_1, a_2, a_3 ,a_4, a_5 и a_6 при умножении на $10^6 - 1$ должна делиться на n. Но поскольку любые 6 различных ненулевых цифр взаимно просты в совокупности (ведь среди них точно найдутся две подряд идущие), получаем, что $10^6 - 1$ делится на n. Поскольку мы ищем наибольшее возможное n, достаточно изучить наибольшие делители числа $10^6 - 1$, последовательно деля его на его наименьшие делители. Само $10^6 - 1 = 999999$ и $(10^6 - 1)/3 = 333333$ не подойдут, поскольку любое кратное им 6-значное число содержит совпадающие цифры (более того, даже все его цифры совпадают). Следующий по величине делитель числа $10^6 - 1$ это $(10^6 - 1)/7 = 142857$, и он, как нетрудно убедиться, подойдет (в качестве $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ как раз нужно будет взять 142857).

3. *В клетках квадрата 10×10 расставлены все натуральные числа от 1 до 100, по одному числу в каждой клетке. Сначала Паша выбирает клетку и ставит туда шахматного короля. Далее он может ходить королем в клетку, соседнюю по углу или стороне, если число в этой клетке больше числа в клетке, на которой король в данный момент стоит. Какое наибольшее число клеток Паша может гарантированно обойти королем, независимо от исходной расстановки чисел в клетках?*

Ответ. 4. **Решение.** Заметим, что в квадрате 2×2 король может обойти клетки в любом порядке. Тогда можно обойти клетки любого из квадратов 2×2 в порядке возрастания их номеров.

Занумеруем клетки следующим образом. Номера от 1 до 50 присваиваются клеткам в нечётных строках, а остальные — в чётных. При этом номера от 1 до 25 и от 51 до 75 присваиваются клеткам в нечётных столбцах. В таком случае король не может более одного раза изменить номер своей строки. А находясь внутри одной строки не сможет более одного раза изменить номер своего столбца. Т.е. сделает не больше трёх ходов.

4. *В треугольнике ABC на стороне AB выбрана точка D и на продолжении AC за точку A выбрана точка E, на отрезке CD выбрана точка X, и на продолжении BE за точку E выбрана точка Y. При этом $BY = AC$, $CX = AB$, $AD = DX$, $AE = EY$. Докажите, что точки A, X и Y лежат на одной прямой.*

Решение. Проведем через B прямую, параллельную AC, и пересечем ее с AY в точке T. Тогда $\angle YTB = \angle EAY = \angle AYE = \angle BYT$, значит BYT равнобедренный, т.е. $BT = BY = AC$. Отсюда следует, что

$ABTC$ — параллелограмм, а значит AT проходит через середину BC, т.е. Y лежит на медиане ABC из угла A. Аналогично и точка X лежит на той же медиане, значит A, X, Y лежат на одной прямой.

5. *Обозначим через $d(n)$ количество натуральных делителей числа n (включая n и 1). Например, $d(1) = 1$, $d(6) = 4$, $d(2024) = 16$. Какая из сумм больше:*

$$d(1) + d(3) + d(5) + \ldots + d(2023) \ \textit{ или } \ d(2) + d(4) + d(6) + \ldots + d(2024)?$$

Ответ. Правая часть больше. **Решение.** Для каждого натурального k посчитаем, сколько раз k встречается в роли делителя чисел 1, 3, ..., 2023 и сколько раз в роли делителя 2, 4, ..., 2024. *Вкладом* числа k назовем разность этих количеств для правой и для левой частей. Нам нужно доказать, что суммарный вклад всех чисел от 1 до 2024 больше 0. Ясно, что четные k дают положительный вклад, поскольку являются делителями только четных чисел. Пусть k нечетно. Выпишем ряд: $k, 2k, 3k, 4k, \ldots$. В этом ряду нечетные и четные числа чередуются. Значит, вклад нечетного k не меньше -1. Тогда суммарный вклад всех чисел от 1 до 2024 не меньше $(-1)+1+(-1)+1+\ldots+1$, т.е. не меньше 0. Осталось заметить, что вклад, например, $k = 2$, больше 1, значит суммарный вклад строго больше 0.

6. *Существует ли такое натуральное k, для которого при любом расположении $4k$ единиц и $4k$ двоек по кругу можно разбить круг на несколько (хотя бы три) групп подряд стоящих чисел так, чтобы во всех группах суммы чисел оказались равны?*

Ответ. Нет. **Решение.** Расположим по кругу $2k$ двоек, затем $2k - 1$ единиц, затем еще $2k$ двоек, затем оставшиеся $2k + 1$ единиц. Посмотрим на объединение групп, содержащих блок из $2k - 1$ единицы. В их объединении сумма нечетна, поскольку блок из $2k+1$ единицы они задевать не могут (иначе какая-то из групп полностью покрывает $2k$ двоек и еще хотя бы одну единицу, и тогда сумма в ней уже не меньше $4k + 1$, что больше трети от общей суммы $12k$). Значит, в каждой из групп сумма нечетна, а общее количество групп четно. Тогда блок из $2k$ двоек покрывается не более чем двумя группами, значит в каждой группе сумма не меньше $2k \cdot 2/2 = 2k$. Значит есть не более двух групп, задевающих блок из $2k-1$ единиц (иначе какая-то из групп полностью содержится в этом блоке, и тогда сумма в этой группе не больше $2k-1$, а должна быть не меньше $2k$). Если этих групп ровно две, то их сумма содержит $2k-1$ единицу и несколько двоек, т.е. нечетна, а должна быть четной как сумма двух равных чисел. Значит эта группа ровно одна, и она содержит весь блок из $2k-1$ единицы (и еще, возможно, несколько двоек). Соседние с ней группы в объединении с ней должны полностью покрывать оба блока двоек, а также хотя бы по одной единице из блока длины $2k + 1$ (чтобы стать нужной четности). Если кроме этих трех групп больше ничего нет, то в каждой из групп сумма равна $12k/3 = 4k$ — т.е. четна, а должна быть нечетна по доказанному выше. Если же групп хотя бы четыре, то помимо этих трех групп остается всего лишь не более $2k - 1$ единиц, и есть группа содержащаяся в этом блоке. Но тогда сумма в этой группе не больше $2k - 1$, а мы уже доказывали, что в каждой группе сумма не меньше $2k$ — противоречие.

7. *В остроугольном треугольнике ABC точка D — основание высоты из A на BC. Точка E выбрана на стороне AC, и точка F на отрезке DE, причем $\angle AFB = 90°$ и $BD \cdot DE = DC \cdot EF$. Найдите $\angle AED$.*

Ответ. $90°$. **Решение.** Опустим перпендикуляр DE' из D на AC, и пересечем окружность s с диаметром AB (на которой лежат точки F и D) с прямой DE' вторично в точке F'. Заметим подобие $AE'F' \sim ADB$ по двум углам (одна пара углов $\angle AE'F' = \angle ADB = 90°$, другая $\angle ABD = \angle AF'E'$ из вписанности $ABDF'$).

Также заметим подобие $ADE' \sim DCE'$ по двум углам. Запишем равенства отношений, которые следуют из найденных подобий: $E'F'/BD = AE'/AD = E'D/CD$, откуда $E'F'/E'D = BD/CD = EF/ED$. Предположим, что $F \neq F'$. Тогда FF' параллельно AC, т.е. F и D диаметрально противоположны на окружности s, что невозможно, т.к. D и F лежат по одну сторону от диаметра AB. Значит, $F = F'$, $E = E'$, откуда следует что $\angle AED = 90°$.

8. *Упростите выражение так, чтобы оно не содержало многоточий:*

$$\frac{\sqrt{n+\sqrt{1}} + \sqrt{n+\sqrt{2}} + \ldots + \sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}}{\sqrt{n-\sqrt{1}} + \sqrt{n-\sqrt{2}} + \ldots + \sqrt{n-\sqrt{n^2-1}}}.$$

Ответ. $1 + \sqrt{2}$. **Решение.** Воспользуемся следующим тождеством:

$$\sqrt{n+\sqrt{k}} + \sqrt{n-\sqrt{k}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{n+\sqrt{n^2-k}}.$$

Доказать его легко, возведя обе стороны равенства в квадрат.

Запишем это тождество для всех k от 1 до $n^2 - 1$, и все полученные равенства сложим. Тогда если в исходной дроби числитель равнялся a, а знаменатель b, то мы получим равенство $a + b = \sqrt{2}a$, откуда $a(\sqrt{2} - 1) = b$, и $a/b = 1/(\sqrt{2} - 1) = 1 + \sqrt{2}$.