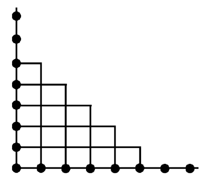
VII Европейский математический турнир «Покровское», 27 февраля – 4 марта 2024 года

Командная олимпиада. 6 класс. Решения
28 февраля

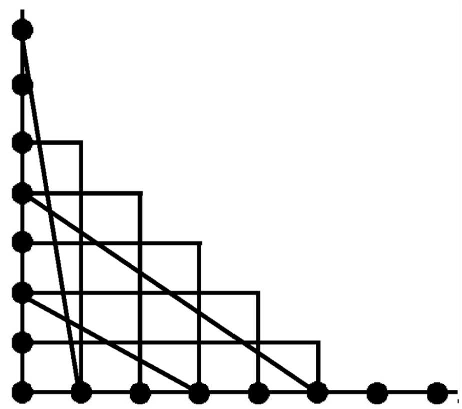
1. В ювелирном магазине взломали витрину, и полиция задержала всех шестерых, кто был в этот момент в магазине. На вопрос «Сколько человек участвовали во взломе?» задержанный А ответил «3», Б и В ответили «4», Г и Д — «5», Е — «6». Как выяснилось впоследствии, все взломщики солгали, а остальные (честные покупатели) сказали правду. Кто из А, Б, В, Г, Д, Е — честные?

Ответ. Б и В. **Решение.** Если все солгали, то все шестеро — взломщики, но тогда взломщик Е не мог сказать “6”. Значит, кто-то сказал правду. В таком случае число честных (ответивших так же) должно дополнять названное число взломщиков до 6. Для А имеем 3+1<6, для Б и В — 4+2=6 (сходится), для Г и Д — 5+2>6, для Е — 6+1>6. Итак, подходит только случай, когда честные Б и В.



2. На клетчатой плоскости расположена лесенка высотой 5 клеток и отмечены точки как на рисунке. Можно ли провести три отрезка с концами в отмеченных точках так, чтобы каждая клеточка лесенки разделялась на две части каким-то из трех отрезков?

Ответ. Можно. **Решение.** Например, как на рисунке справа.



3. Натуральное число называется *хорошим*, если его можно представить в виде $a^2 - bc$, где a, b и c — три последовательных натуральных числа (в каком угодно порядке). Сколько натуральных чисел, не превосходящих миллиона, являются хорошими?

Ответ. 333333. **Решение.** Пусть некоторое натуральное число является хорошим и представлено в виде $a^2 - bc$. Тогда понятно, что a не может быть наименьшим из этих 3 чисел, иначе значение выражения не будет натуральным. Если a — среднее из 3 чисел, то $a^2 - bc = a^2 - (a-1)(a+1) = 1$. Наконец, если a — наибольшее из этих чисел, то пусть, не умаляя общности, $b \geqslant 2$ — среднее. Тогда $a^2 - bc = (b+1)^2 - b(b-1) = 3b + 1$. То есть все числа, дающие остаток 1 при делении на 3, большие 4, представимы в таком виде. Итого, нам подходят $333334 - 1 = 333333$ числа.

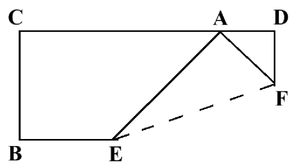
4. На столе лежит куча из k орехов. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За ход можно выбрать одну кучку и разделить ее на три меньшие кучки (не обязательно одинаковые, в каждой хотя бы один орех). Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Для каждого k выясните, кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник.

Ответ. при любом $k > 2$ победит Петя, иначе Вася. **Решение.** Понятно, что при $k = 1, 2$ Петя не сможет сделать первый же ход, поэтому он проигрывает. Докажем, что для $k > 2$

Петя имеет выигрышную стратегию. Если k нечетно, то первым ходом он разделит орехи на кучки из 1, $(k-1)/2$ и $(k-1)/2$ орехов и (мысленно) положит кучки по $(k-1)/2$ орехов на два отдельных столика. Так как кучку из одного ореха нельзя разделить на три кучки, про неё можно забыть. Далее на любой ход Васи на одном столике Петя будет отвечать повторением этого хода на другом столике. После хода Пети позиции на обоих столиках будут одинаковы, поэтому у Пети всегда есть ответный ход. Он не проиграет, а так как игра закончится (число кучек не может стать больше k), то Петя выиграет. Если же k четно, что пусть Первым ходом Петя разделит орехи на кучки из 2, $k/2$ и $k/2$ орехов. Поскольку кучку из 2 орехов нельзя делить, про нее также можно забыть, а дальше играть повторять ходы за Васей как и в первом случае.

5. Шесть шестизначных чисел получаются друг из друга циклическим сдвигом шести различных ненулевых цифр: $\overline{abcdef}, \overline{bcdefa}, \ldots, \overline{fabcde}$. Какое наибольшее значение может принимать наибольший общий делитель всех шести чисел?

Ответ. 142857. **Решение.** Обозначим наибольший общий делитель всех чисел через n. Заметим, что среди цифр a, b, c, d, e, f есть либо единица, либо две взаимно простые цифры. Пусть, не умаляя общности, одна из них a. Обозначим число $\overline{bcdef}$ за x. Тогда по условию $a \cdot 10^5 + x$ делится на n и $10x + a$ делится на n. Умножим первое на 10 и вычтем второе. Получим, что $a(10^6 - 1)$ делится на n. Аналогичными рассуждениями получаем, что каждая из цифр a, b, c, d, e, f при умножении на $10^6 - 1$ должна делиться на n. Но поскольку любые 6 различных ненулевых цифр взаимно просты в совокупности (ведь среди них точно найдутся две подряд идущие), получаем, что $10^6 - 1$ делится на n. Поскольку мы ищем наибольшее возможное n, достаточно изучить наибольшие делители числа $10^6 - 1$, последовательно деля его на его наименьшие делители. Само $10^6 - 1 = 999999$ и $(10^6 - 1)/3 = 333333$ не подойдут, поскольку любое кратное им 6-значное число содержит совпадающие цифры (более того, даже все его цифры совпадают). Следующий по величине делитель числа $10^6 - 1$ это $(10^6 - 1)/7 = 142857$, и он, как нетрудно убедиться, подойдет (в качестве $\overline{abcdef}$ как раз нужно будет взять 142857.



6. Угол проволочного прямоугольника $ABCD$ перегнули и припаяли к стороне CD, как на рисунке. Муравей из B и улитка из D одновременно поползли по кратчайшим путям в C. Оказалось, что муравей приполз на 20 минут раньше. Из C они одновременно поползли в B, причем улитка ползла по самому короткому пути и прибыла на одну минуту раньше муравья, проползшего через A и E. Известно, что для обхода треугольника ADF муравью потребуется 7 минут. А сколько времени потребуется муравью, чтобы обойти $ACBE$, если известно, что скорости муравья и улитки постоянны, и муравей в 3 раза быстрее улитки?

Ответ. 17 минут. **Решение.** Обозначим через t_1 время, небходимое муравью, чтобы проползти BC, через t_2 — время, чтобы проползти BC, через t — время, чтобы проползти AC. Тогда улитке для преодоления этих участков придется затратить $3t_1, 3t_2, 3t$ минут соответственно. Из первого условия следует, что $t_1 + 20 = 3t_2$. Заметим, что $BE + AE = CD$, откуда для преодоления маршрута $CAEB$ муравью потреубется $t + t_2$ минут, чо на один больше $3t_1$. Тогда получаем второе условие $t + t_2 = 3t_1 + 1$. Заметим, что для преодоления AD муравью необходимо $t_2 - t$ минут, а также, что $AF + DF = BC$. Значит, на прохзождения всего треугольника муравей потратит $t_2 - t + t_1 = 7$ минут. Складывая первые два условия, получаем $2t_1 + 2t_2 - t = 19$. Вычитая из данного равенства третее условие, получаем $t_1 + t_2 = 12$, откуда $t = 12 - 7 = 5$. На обход $ACBE$ муравью необходимо

$t + t_1 + t_2 = 5 + 12 = 17$ минут.

7. Клетки квадрата 9×9 пронумерованы числами $1, 2, 3, \ldots, 9^2$. Две клетки называются *почти соседними*, если шахматный король может попасть из одной клетки в другую не более чем за два хода. Сначала Паша выбирает клетку и ставит туда фишку. Он может перемещать фишку в почти соседнюю клетку, если число в этой клетке больше числа в клетке, на которой фишка стоит в данный момент. Какое наибольшее число клеток Паша может гарантированно обойти фишкой, независимо от исходной нумерации клеток?

Ответ. 9 клеток. **Решение.** Докажем, что Паша в любом случае может обойти хотя бы 9 клеток. Выделим на доске произвольный квадрат 3×3. Заметим, что в нем любые две клетки являются почти соседними. Поставим фишку в клетку с наименьшим числом в этом квадрате. Далее сдвинем ее в клетку со вторым по величине числом, затем в клетку с третьим повеличине числом, и т. д. В итоге мы обойдем все клетки выделенного квадрата.

1	2	3	1	2	3	1	2	3
4	5	6	4	5	6	4	5	6
7	8	9	7	8	9	7	8	9
1	2	3	1	2	3	1	2	3
4	5	6	4	5	6	4	5	6
7	8	9	7	8	9	7	8	9
1	2	3	1	2	3	1	2	3
4	5	6	4	5	6	4	5	6
7	8	9	7	8	9	7	8	9

Покажем, что существует нумерация клеток, при которой Паша не сможет посетить больше 9 клеток. Разобьем доску на квадраты 3×3 и раскрасим клетки в 9 цветов как на рисунке справа. Поставим в клетки первого цвета числа $1, 2, 3, \ldots, 9$, в клетки второго цвета — числа $10, 11, 12, \ldots, 18$, $\ldots$, в клетки девятого цвета — числа $73, 74, 75, \ldots, 81$. Заметим, что при каждом перемещении фишки в такой нумерации увеличивается номер цвета клетки, на которой стоит фишка, поэтому получится обойти не более 9 клеток.

8. Шесть детей встали в круг, у одного из них есть n конфет, а у остальных пяти ребят конфет нет. За один шаг ребенок, у которого есть хотя бы 4 конфеты, может дать каждому своему соседу, а также человеку напротив по одной конфете, и одну конфету съесть. При каких n за несколько шагов дети смогут добиться того, что у всех будет поровну конфет?

Ответ. При n, делящихся на 28. **Решение.** Сначала покажем, что при n, не делящемся на 28, детям не удастся осуществить свой план. Разобьем детей на две тройки A и B так, что дети в одной тройке не соседствуют друг с другом. Заметим, что за один ход разность количеств конфет у тройки A и у тройки B меняется на $3 + 1 + 3 = 7$. Поскольку в конце разность делится на 7, значит, в начале разность делилась на 7. То есть n делится на 7. Теперь рассмотрим двух детей X и Y, имеющих общего соседа, таких, что изначально у X были все конфеты. Заметим, что разность между количеством конфет у X и Y за одну операцию либо не изменяется, либо изменяется на $1 + 3 = 4$. Раз в конце разность делилась на 4, значит, делилась на 4 и изначально. Итого n делится на 4 и на 7, то есть делится на 28.

Осталось показать, как при $n = 28k$ дети могут осуществить свой план. Сначала ребенок, у которого $28k$ конфет делает $7k$ ходов. Тогда и трех детей, стоящих через один, будет по $7k$ конфет, а у оставшихся трех конфет не будет. Пусть теперь первые трое сделают по k ходов. В итоге у каждого останется $7k - 4k = k + k + k = 3k$ конфет.