Математический турнир Европы

VII Европейский математический турнир «Покровское», 27 февраля – 4 марта 2024 года

Командная олимпиада. 5 класс. Решения
28 февраля

1. В ювелирном магазине взломали витрину, и полиция задержала всех шестерых, кто был в этот момент в магазине. На вопрос «Сколько человек участвовали во взломе?» задержанный А ответил «3», Б и В ответили «4», Г и Д — «5», Е — «6». Как выяснилось впоследствии, все взломщики солгали, а остальные (честные покупатели) сказали правду. Кто из А, Б, В, Г, Д, Е — честные?

Ответ. Б и В. **Решение.** Если все солгали, то все шестеро — взломщики, но тогда взломщик Е не мог сказать "6". Значит, кто-то сказал правду. В таком случае число честных (ответивших так же) должно дополнять названное число взломщиков до 6. Для А имеем $3+1<6$, для Б и В — $4+2=6$ (сходится), для Г и Д — $5+2>6$, для Е — $6+1>6$. Итак, подходит только случай, когда честные Б и В.

2. 7 гномов добывали алмазы. Второй добыл больше первого на половину веса алмазов, добытых первым. Третий добыл больше второго на треть веса алмазов, добытых вторым. И т.д., седьмой добыл больше шестого на $1/7$ веса алмазов, добытых шестым. Во сколько раз седьмой добыл больше, чем первый?

Ответ. В 4 раза. **Решение.** Чтобы получить вес алмазов, добытых следующим гномом, вес алмазов первого надо умножить на $3/2$, вес алмазов второго — на $4/3$, вес алмазов третьего — на $5/4$ и т.д. Значит, умножив вес алмазов первого на произведение всех этих дробей, получим вес алмазов седьмого. Так как $3/2 \cdot 4/3 \cdot 5/4 \cdot \ldots \cdot 8/7 = 8/2 = 4$, то седьмой добыл (по весу) в 4 раза больше первого.

3. Для каждого решения ребуса М·А·Р·Т=60 нашли сумму двух чисел МА+РТ. Сколько разных значений у таких сумм? (Разные буквы означают разные цифры.)

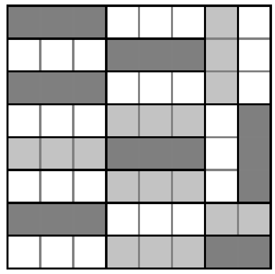
Ответ. 11. **Решение.** Есть два разложения 60 на разные множители: $1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ и $1 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 5$. В каждом надо выбрать по две цифры в разряд единиц с различными суммами пар. Есть 6 вариантов для первого разложения и 5 для второго.

4. На столе лежит куча из 300 орехов. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За ход можно выбрать одну кучку и разделить её на три меньшие кучки (не обязательно одинаковые, в каждой хотя бы один орех). Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник?

Ответ. Победит Петя. **Решение.** Первым ходом он разделит орехи на кучки из 2, 149 и 149 орехов и (мысленно) положит кучки по 149 орехов на два отдельных столика. Так как кучку из двух орехов нельзя разделить на три кучки, про неё можно забыть. Далее на любой ход Васи на одном столике Петя будет отвечать повторением этого хода на другом столике. После хода Пети позиции на обоих столиках будут одинаковы, поэтому у Пети всегда есть ответный ход. Он не проиграет, а так как игра закончится (число кучек не может стать больше 300), то Петя выиграет.

5. Клетчатый квадрат 8×8 разбит на полоски 1×2 и 1×3. Полоски раскрашены в три цвета так, что никакие две части одинакового цвета не граничат по отрезку (но могут иметь общую точку). Каково наименьшее число полосок?

Ответ. 22. **Решение.** Пример. Разрежем квадрат на 20 полосок 1×3 и 2 полоски 1×2 и раскрасим как на рисунке. Оценка. 21 полоски не хватит, так как даже 21 самая большая по площади полоска покрывает только 63 клетки.



6. Дорожки идут по границам прямоугольного парка $ABCD$. Заяц и ёж бегают по дорожкам с постоянными, но разными скоростями, заяц в 2,5 раза быстрее ежа. Они стартовали одновременно: заяц стартовал из B, ёж из D и побежали напрямую в C. Заяц прибежал туда на 10 минут раньше ежа. Дождавшись там ежа, заяц побежал вокруг по маршруту $CDAB$, а ёж побежал в B напрямую. На этот раз заяц опередил ежа на 20 минут. За какое время заяц может обежать вокруг парка?

Ответ. За 2 часа. **Решение.** Если бы заяц не ждал ежа, а продолжил свой бег по кругу, он прибежал по кругу $BCDAB$ на 30 мин раньше, чем ёж пробежал туда по маршруту DCB. Пусть заяц тратит на круг T мин, тогда ёж $2,5T$. Маршрут DCB — полкруга для ежа, поэтому он потратит $1,25T$. Заяц его опередит на $0,25T = 30$. Значит, $T = 4 \cdot 3=$ 120 мин $=$ 2 часа.

7. Имеется две золотые и 4 серебряные монеты. Известно, что среди них ровно две фальшивые, причем среди фальшивых хотя бы одна золотая. Настоящая монета весит 10 г, фальшивая золотая – 9 г, а фальшивая серебряная – 11 г. Как найти обе фальшивки за два взвешивания на чашечных весах без гирь?

Решение. Обозначим золотые монеты X и Y, а серебряные A, B, C, D. Взвесим AX?BY. Пусть AX<BY. Золотые монеты не могут быть фальшивыми одновременно, так как иначе весы покажут равенство. Поэтому X фальшивая, а Y настоящая. A не может быть фальшивой, поэтому на роль фальшивой монеты остаются только B, C, D. Находим нужную, сравнив B?C.
Пусть AX=BY, то фальшивки – одна из пар AX, BY, XY. Находим нужную, сравнив A?B.
Пусть AX>BY, то, по аналогии с первым случаем, получаем, что Y фальшивая, а так же одна из монет A, C, D. Находим нужную, сравнив A?C.

8. В классе мальчиков и девочек по 18. На 8 марта мальчики поздравили одноклассниц открытками. Каждый мальчик поздравил одинаковое число девочек, а Алина получила поздравление ровно от 9 одноклассников. Докажите, что какие-то две девочки получили поздравления от одинакового числа одноклассников.

Решение. Отметим мальчиков синими точками, девочек — красными, а поздравления – соединяющией точки линией. По условию из всех синих точек выходит поровну линий, и потому общее число линий делится на 18. Из красных точек может выходить $0, 1, \ldots, 17,$ 18 линий. Заметим, что $0+1+\ldots+17+18 = 171$. Предположим, что не нашлось двух девочек, получивших одинаковое число поздравлений. Тогда получилась сумма, полученная из предыдущей вычеркиванием одного слагаемого (слагаемых 19, а надо 18). Единственная возможность сделать сумму кратной 18 – это вычеркнуть 9. Но как раз 9 должно остаться из-за Алины. Противоречие. Значит, две девочки с одинаковым числом поздравлений есть.