## VII Европейский математический турнир «Покровское», 27 февраля – 4 марта 2024 г.

## Командная олимпиада. 7 – 8 классы.
## 28 февраля

**1.** Дима, Оля и кошка Кайя переклеивают обои в комнате. Дима и Кайя вместе могут справиться с работой ровно за 10 дней, Дима и Оля — ровно за 5 дней, а в одиночку Кайя управится ровно за 15 дней. Весь понедельник и вторник Оля и Кайя клеили обои вдвоём. Всю среду они работали уже втроём, вместе с Димой. Но начиная с четверга Кайя разленилась, и Оле с Димой пришлось доклеивать обои вдвоём. В какой день недели закончится работа по поклейке обоев?

**2.** Шесть шестизначных чисел получаются друг из друга циклическим сдвигом шести различных ненулевых цифр: $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$, $\overline{a_2a_3a_4a_5a_6a_1}$, $\ldots$, $\overline{a_6a_1a_2a_3a_4a_5}$. Какое наибольшее значение может принимать наибольший общий делитель всех шести чисел?

**3.** В клетках квадрата $10 \times 10$ расставлены все натуральные числа от 1 до 100, по одному числу в каждой клетке. Сначала Паша выбирает клетку и ставит туда шахматного короля. Далее он может ходить королем в клетку, соседнюю по углу или стороне, если число в этой клетке больше числа в клетке, на которой король в данный момент стоит. Какое наибольшее число клеток Паша может гарантированно обойти королем, независимо от исходной расстановки чисел в клетках?

**4.** В треугольнике $ABC$ на стороне $AB$ выбрана точка $D$ и на продолжении $AC$ за точку $A$ выбрана точка $E$, на отрезке $CD$ выбрана точка $X$, и на продолжении $BE$ за точку $E$ выбрана точка $Y$. При этом $BY = AC$, $CX = AB$, $AD = DX$, $AE = EY$. Докажите, что точки $A$, $X$ и $Y$ лежат на одной прямой.

**5.** Обозначим через $d(n)$ количество натуральных делителей числа $n$ (включая $n$ и 1). Например, $d(1) = 1$, $d(6) = 4$, $d(2024) = 16$. Какая из сумм больше:

$$d(1) + d(3) + d(5) + \ldots + d(2023) \text{ или } d(2) + d(4) + d(6) + \ldots + d(2024)?$$

**6.** Существует ли такое натуральное $k$, для которого при любом расположении $4k$ единиц и $4k$ двоек по кругу можно разбить круг на несколько (хотя бы три) групп подряд стоящих чисел так, чтобы во всех группах суммы чисел оказались равны?

**7.** В остроугольном треугольнике $ABC$ точка $D$ — основание высоты из $A$ на $BC$. Точка $E$ выбрана на стороне $AC$, и точка $F$ на отрезке $DE$, причем $\angle AFB = 90^\circ$ и $BD \cdot DE = DC \cdot EF$. Найдите $\angle AED$.

**8.** Упростите выражение так, чтобы оно не содержало многоточий:

$$\frac{\sqrt{n+\sqrt{1}} + \sqrt{n+\sqrt{2}} + \ldots + \sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}}{\sqrt{n-\sqrt{1}} + \sqrt{n-\sqrt{2}} + \ldots + \sqrt{n-\sqrt{n^2-1}}}.$$