VII Европейский математический турнир «Покровское», 27 февраля – 4 марта 2024 г.

Личная олимпиада. 7 – 8 классы. Решения.
4 марта

1. *Разрежьте какой-нибудь квадрат на пять попарно различных прямоугольников со сторонами* $a \times b$, $b \times c$, $c \times d$, $d \times e$, $e \times a$. *Числа* a, b, c, d, e *(в том числе соседние) могут совпадать, и вы можете сами их выбирать. Прямоугольники* $x \times y$ *и* $y \times x$ *считаются одинаковыми!*

Решение. Есть много разных способов. Например, можно разрезать 4×4 на 1×1, 1×2, 2×2, 2×3, 3×1 (расположив прямоугольники по спирали вокруг 1×1). Еще можно аналогичным образом разрезать 5×5 на 1×1, 1×2, 2×3, 3×4, 4×1.

2. *Витя, Катя, Марк, Сеня и Ян зашли в магазин «Всё для всех», чтобы отметить свой успех. Каждый из них купил по две разные шоколадки, и заплатили они за это соответственно* 130, 150, 190, 200 *и* 220 *рублей. Известно, что в магазине продается ровно четыре вида шоколадок. Сколько стоят эти четыре вида вместе?*

Ответ. 350.

Решение. Из 4 видов шоколадок можно составить 6 пар, 5 из которых набрали дети. У каждой из этих пар есть другая, дополняющая ее стоимость до суммарной стоимости 4 шоколадок, и 5 детей образуют ровно две такие пары пар. Поэтому чтобы найти ответ в задаче, достаточно всеми возможными способами сложить результаты детей, и найти там два равных числа. Их суммы это: $280, 320, 330, 350, 340, 350, 370, 390, 420$. Дважды повторяется только 350, значит это и есть ответ.

3. *В треугольнике* ABC *на стороне* AB *выбраны точки* P *и* Q *так, что* $AP = PQ = QB = BC$. *Точка* M *— середина* AC. *Найдите* $\angle PMQ$.

Ответ. 90°.

Решение. Отметим N — середину PQ. Она также является серединой AB, поскольку $AP = BQ$. Тогда $MN = BC/2 = PN = NQ$, а значит $\angle PMQ = 90^\circ$.

4. *Можно ли расставить по кругу числа* $1, 2, \ldots, 2024$ *так, чтобы для любого числа* x *в круге сумма его соседей делилась на* $x + 1$?

Ответ. Нет, нельзя. **Решение.** Для начала заметим, что если есть блок из нескольких (больше одного) подряд идущих нечётных чисел, то есть число (крайнее в этом блоке), соседи которого имеют разную чётность. Тогда для него условие не будет выполняться. Значит, чётные и нечётные числа чередуются. Рассмотрим число 2024. Сумма его соседей делится на 2025, чётна и не превосходит $2023 + 2021 = 4044$. Такое тоже невозможно.

5. *В компании у каждого ровно 20 знакомых. У любых двух знакомых друг с другом людей ровно один общий знакомый, а у любых двух незнакомых друг с другом людей — ровно 6 общих знакомых. Сколько всего человек в компании?*

Ответ. 81.

Решение. Заведем граф знакомств, пусть всего n вершин, тогда $20n/2 = 10n$ ребер. Посчитаем количество «галочек», т.е. ситуаций, когда A знаком с B и B знаком с C, двумя способами. С одной стороны, каждая вершина является центром $20 \cdot 19/2$ галочек, значит галочек $190n$. С другой стороны, каждое из $10n$ ребер по условию является парой концов ровно одной галочки, а каждое из $n \cdot (n-1)/2 - 10n$ анти-ребер является парой концов ровно 6 галочек. Получаем уравнение $190n = 10n + 6(n(n-1)/2 - 10n)$, сокращаем на n, упрощаем, получаем $240 = 3(n-1)$, откуда $n = 81$.

6. *Буриданов осёл стоит во внутренней точке отрезка, на концах которого расположены стога сена. Каждую минуту осёл перемещается по отрезку так, чтобы в два раза сократить расстояние до какого-нибудь из стогов. Через сутки он оказался в той же самой точке, откуда начал движение. Сколько на отрезке есть точек, откуда осёл мог стартовать?*

Ответ. $2^{1440}-2$. **Решение.** Пусть стога сена находятся в точках с координатами 0 и 1, а осёл в точке a_0. Обозначим через a_i координату осла после i-ой минуты. Тогда $a_{n+1}=(a_n+x_{n+1})/2$, где x_{n+1} — координата стога, к которому осёл собирается приблизится на $(n+1)$-ой минуте. Тогда нетрудно заметить, что

$$a_n=\frac{x_n}{2}+\frac{x_{n-1}}{2^2}+\ldots+\frac{x_1}{2^n}+\frac{a_0}{2^{n+1}}.$$

Поскольку после 1440-ой минуты осёл снова оказался в точке с координатой a_0

$$(2^{1441}-1)a_{1440}=2^{1440}x_{1440}+2^{1439}x_{1439}+\ldots+2x_1.$$

Значит, для любого выбора $x_1,x_2,\ldots,x_{1440}$ существует единственная точка, в которую осёл вернётся выбирая направления таким образом. Каждое из x_i можно выбрать двумя способами, отсюда получаем ответ 2^{1440}. Вычитаем из него 2, потому что нам не подходят ситуации, когда все x_i равны 0, или все x_i равны 1 (в этих и только в этих случаях осел должен был бы стартовать в концах отрезка, а это запрещено условием). Кроме того, все эти точки различны, поскольку для них выражения в правой части последнего равенства различны (из соображений двоичной записи числа).

7. *Дано натуральное $n\geqslant 2$. Найдите все наборы попарно различных вещественных чисел $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, которые можно переставить в некотором порядке так, чтобы получился набор чисел*

$$a_1-2a_2,\ a_2-2a_3,\ \ldots,\ a_{n-1}-2a_n,\ a_n-2a_1.$$

Решение 1. Пусть S — сумма квадратов чисел набора. Тогда $S=\sum(a_i-2a_{i+1})^2=5\sum a_i^2-4\sum a_ia_{i+1}=5S-4\sum a_ia_{i+1}$. Отсюда $\sum a_i^2-\sum a_ia_{i+1}=0$. Домножим на 2, разложим как $\sum(a_i-a_{i+1})^2=0$. Отсюда $a_i=a_{i+1}$, что невозможно по условию.

Решение 2. Уже во время олимпиады выяснилось, что есть более простое решение. Пусть a_k — наибольшее среди всех a_i. По условию $a_{k-1}-2a_k=a_m$ для какого-то m. Но тогда $a_k=(a_{k-1}+a_m)/2$, а значит a_{k-1} и a_m находятся по разные стороны от a_k. Но это невозможно, если a_k — наибольшее!