

VII Европейский математический турнир  
«Покровское», 27 февраля – 4 марта 2024 г.



Математический  
турнир Европы

Математический бой №3. 7–8 классы. Гранд-лига.  
2 марта.

1. В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$   $\angle DAB = 90^\circ$ ,  $P$  – середина стороны  $BC$ . Оказалось, что  $\angle ADB = \angle CAP$ . Докажите, что  $\angle ADC = \angle BAP$ .

2. В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$  стороны  $AB$  и  $CD$  перпендикулярны. Точка  $M$  – середина  $AD$ , точка  $N$  – середина  $BC$ . Докажите, что  $2MN \geq |BC - AD|$ .

3. На прямой в ряд лежат 200 шариков: 100 красных и 100 синих. За одну операцию можно поменять местами два рядом лежащих шарика. Пусть  $A$  – наименьшее возможное количество операций, за которые можно добиться того, чтобы 100 самых левых шариков оказались красными, и пусть  $B$  – наименьшее возможное количество операций, за которые можно добиться того, чтобы 100 самых правых шариков оказались красными. Найдите все значения, которые может принимать  $A + B$ .

4. Кошка Кайя хочет попасть из левого нижнего угла квадрата  $3n \times 3n$  в правый верхний. За ход она может прыгнуть на одну клетку вверх или на одну клетку вправо. Назовем набор отмеченных клеток в квадрате *блокирующим*, если Кайя не может осуществить свой план, не наступая на отмеченные клетки, но при удалении из набора любой клетки это свойство нарушается. Приведите пример блокирующего набора, в котором не менее  $3n^2 - 2n$  клеток.

5. Дано  $n \geq 3$ . Найдите наибольшее число  $k$ , такое что для любого набора попарно различных вещественных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$  среди чисел

$$a_1 + a_2, a_2 + a_3, \dots, a_{n-1} + a_n, a_n + a_1$$

обязательно есть хотя бы  $k$  попарно различных. (Ответ может зависеть от  $n$ .)

6. Положительные числа  $a, b, c, d$  удовлетворяют условию  $(ac + bd)^2 \geq 16abcd$ . Докажите, что

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \geq 8.$$

7. Сколько максимум подряд идущих натуральных чисел могут иметь суммы цифр, не кратные 8?

8. Найдите все натуральные  $k$ , для которых найдутся натуральные  $x$  и  $y$ , такие, что  $x^k y$  делится на  $x^2 + y^2$ , причем частное от деления – простое число.

**VII Европейский математический турнир  
«Покровское», 27 февраля – 4 марта 2024 г.**



**Математический  
турнир Европы**

**Математический бой №3. 7–8 классы. Первая лига.  
2 марта.**

1. Через центр  $O$  ромба  $ABCD$  проведена прямая, которая пересекает продолжение  $AB$  за точку  $B$  в точке  $X$ , и отрезок  $AD$  в точке  $Y$ , причем  $OX = 3OY$ . Найдите  $\angle ACX$ .

2. В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$  стороны  $AB$  и  $CD$  перпендикулярны. Точка  $M$  – середина  $AD$ , точка  $N$  – середина  $BC$ . Докажите, что  $2MN \geq |BC - AD|$ .

3. Петя хочет выписать в порядке возрастания 5 различных двузначных чисел, делящихся на 3, в десятичной записи которых встречается каждая цифра от 0 до 9 (включительно). Сколькими способами он может осуществить свой план?

4. Кошка Кайя хочет попасть из левого нижнего угла квадрата  $3n \times 3n$  в правый верхний. За ход она может прыгнуть на одну клетку вверх или на одну клетку вправо. Назовем набор отмеченных клеток в квадрате *блокирующим*, если Кайя не может осуществить свой план, не наступая на отмеченные клетки, но при удалении из набора любой клетки это свойство нарушается. Приведите пример блокирующего набора, в котором не менее  $3n^2 - 2n$  клеток.

5. Найдите наибольшее число  $k$ , такое что для любого набора из 11 попарно различных вещественных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_{11}$  среди чисел

$$a_1 + a_2, a_2 + a_3, \dots, a_{10} + a_{11}, a_{11} + a_1$$

обязательно есть хотя бы  $k$  попарно различных.

6. Вещественные числа  $a, b, c$  удовлетворяют условию

$$a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2ab + 2ac = 4(a + b + c - 1).$$

Какие значения может принимать сумма  $a + b + c$ ?

7. Сколько максимум подряд идущих натуральных чисел могут иметь суммы цифр, не кратные 8?

8. На доске написаны 100 различных простых чисел. Докажите, что произведение некоторых 20 из них, увеличенное на 2 – составное.