VII Европейский математический турнир «Покровское», 27 февраля – 4 марта 2024 года

Математический турнир Европы

Личная олимпиада. 6 класс. Решения
4 марта

Довывод

1. По кругу через равные промежутки стоят 20 фишек. Сколькими способами можно раскрасить их в черный и белый цвет так, чтоба оба соседа черной фишки были одного цвета, а напротив каждой белой фишки стояла черная фишка?

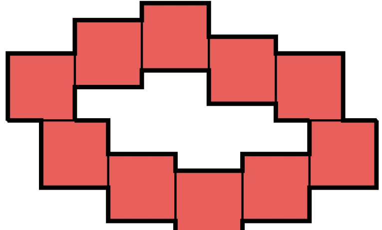
Ответ. 1 способом. **Решение.** Предположим, что в расраске, удовлетворяющей всем условия есть две стоящие подряд черные фишки, тогда их соседи также покрашены в черный цвет. Продолжая аналогичные действия, получаем, что все фишки покрашены в черный цвет. Далее считаем, что двух подряд стоящих черных фишек нет. Рассмотрим произвольную черную фишку (все фишки не могут быть белыми). Тогда оба ее соседа покрашеы в белый цвет, а значит, фишки, противоположные им, покрашены в черный цвет. Тогда между этими двумя черными фишками обязана стоять белая фишка по нашему предположению. Тогда с другой стороны от этих фишек также стоят белые фишки. Для новой стройки БЧБ проводим такие же рассуждения, и так далее. Получаем, что все фишки раскрашены в шахматном порядке. Но в таком случае напротив каждой белой фишки будет стоять белая фишка — противоречие. В итоге получаем, что есть только 1 способ раскрасить фишки требуемым образом.

2. В парк-отель “Покровское” приехали несколько семей с детьми в полном составе. Оказалось, что все приехавшие дети, кроме 24 – единственные в своих семьях (и такие действительно есть), все, кроме 18, имеют ровно одного брата или сестру, а все, кроме 14, ровно двух братьев или сестёр. У скольких детей в “Покровском” больше двух братьев или сестёр?

Ответ. у 4. **Решение.** Обозначим через n количество детей. Тогда с одной стороны мы знаем, что $n \geqslant 24$. С другой стороны количество детей, единственных в своих семьях, ровно $n-24$, имеющих ровно одного брата или сестру — $n-18$, имеющих ровно двух братьев или сестёр — $n-14$, тогда $n-18$ длеится на 2, а также $n-14$ делится на 3. То есть n может быть равно $2, 8, 14, 20, 26, 32, \ldots$. С другой стороны мы знаем, что всего детей не меньше $n-24+n-18+n-14 \leqslant n$, откуда $n \leqslant 28$. Тогда единственный возможный вариант $n = 26$. Тогда детей, у которых больше 2 братьев и сестер, ровно $26-2-8-12 = 4$.

3. В последовательности a, b, c, 10, 30, d, 100, … каждый член, начиная с пятого, равен сумме четырёх предыдущих. Найдите $a + 2b + 3c$.

Ответ. 40. **Решение.** По условию имеем $a + b + c + 10 = 30$, $b + c + 10 + 30 = d$, $c+10+30+d = 100$. Сложим три полученных равенства, получаем $a+2b+3c+90+d = 130+d$, откуда $a + 2b + 3c = 40$.



4. Фигура на рисунке составлена из 10 одинаковых квадратов. Длина внешней границы фигуры составляет 152 см, а внутренней – 84 см. Найдите пеример одного квадрата.

Ответ. 34 см. **Решение.** Обозначим сторону одного квадратика через x. Разность периметров внешней и внутренней части равна 68 см. Заметим, что в этой разности горизонтальные стороны трех самых верхних квадратов и трех самых нижних квадратов не учитываются, так как они взаимно уничтожаются друг с другом. На вертикальных прямых, содержащих стороны трех самых верхних и трех самых нижних квадратиков также приходится нулевая разность. Также нулевая разность приходится на две горизонтальные прямые, по которым соприкасаются 4 оставшихся квадрата. В итоге получаем, что разность периметров равна $8x$, откуда $8x = 68$, то есть $x = 8,5$ см. Тогда периметр одного квадрата равен $4 \cdot 8,5 = 34$ см.

Вывод

5. Можно ли расставить по кругу числа $1, 2, \ldots, 2024$ так, чтобы для любого числа x в круге сумма его соседей делилась на $x + 1$?

Ответ. Нет, нельзя. **Решение.** Для начала заметим, что если есть блок из нескольких (больше одного) подряд идущих нечётных чисел, то есть число (крайнее в этом блоке), соседи которого имеют разную чётность. Тогда для него условие не будет выполняться. Значит, чётные и нечётные числа чередуются. Рассмотрим число 2024. Сумма его соседей делится на 2025, чётна и не превосходит $2023 + 2021 = 4044$. Такое тоже невозможно.

6. В двух соседних углах доски 9×9 стоят кони. Двое игроков по очереди вырезают из доски свободные клетки. Проигрывает тот, после чьего хода один из коней не сможет доскакать по доске до другого. Кто из игроков сможет выиграть, как бы ни ходил другой?

Ответ. Второй игрок. **Решение.** Будем играть за второго игрока. Предположим, что в некоторый момент мы не сможем сделать очередной ход. Тогда, в данный момент еще существует некоторый путь по не вырезанным клеткам. Тогда вне этого пути клеток нет (иначе мы могли бы одну из них вырезать). Раскрасим нашу доску в шахматном порядке. Заметим, что каждым своим ходом конь меняет цвет клетки, на которой он стоит. Тогда, поскольку соседние углы доски одного цвета, конь должен будет пройти через нечетное число клеток, чтобы попасть из одного угла в другой. То есть наш единственный путь состоит из нечетного числа клеток. Тогда до этого было вырезано четное число клеток, а значит, сейчас должен ходить первый игрок — противоречие.

7. У Кати и Бори есть три палочки длиной 1 метр: одна белая, одна синяя и одна красная. Сначала Катя разламывает белую и синюю палочки на три части каждую, а затем Боря разламывает красную палочку на три части. Может ли Катя действовать так, чтобы в конце, независимо от действий Бори она смогла разбить 9 полученных палочек на три группы по 3 палочки так, чтобы

- В каждой группе палочки были разных цветов;
- Суммарная длина любых двух палочек из одной группы больше длины оставшейся палочки из этой группы?

Ответ. Может. **Решение.** Пусть Катя разделит две свои палочки на наборы 50 см, 25 см, 25 см. Пусть Боря разломал свою палочку на части длиной $x \geqslant y \geqslant z$. Тогда Катя разобьет 9 полученных палочек на группы следующим образом: $(50, 50, x)$, $(25, 25, y)$, $(25, 25, z)$. Тогда, понятно, что для первой группы $x < 50 + 50 = 100$ см, остальные два неравенства тривиальны. Для второй и третьей групп также очевидно, что $25 + y > 25$ и $25 + z > 25$. Для оставшихся проверок достаточно заметить, что $y, z < 100/2 = 50$ см, откуда $y, z < 25 + 25 = 50$ см, что завершает проверку для второй и третьей групп.