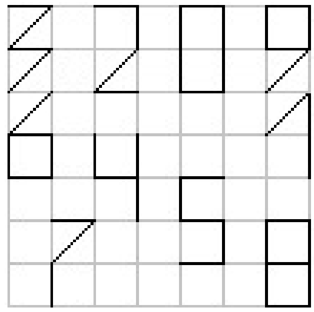
VII Европейский математический турнир «Покровское», 27 февраля – 4 марта 2024 года

Математический турнир Европы

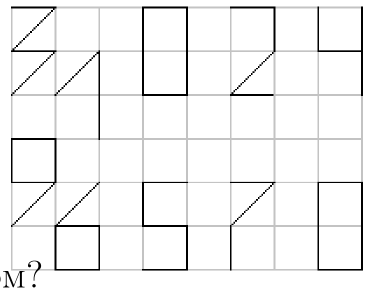
Личная олимпиада. 5 класс. Решения
4 марта

Довывод



1. В клетчатом квадрате 7×7 нарисован образец написания всех 10 цифр в формате почтового индекса (см. рис.): каждая расположена в вертикальной паре клеток, и никакие две цифры не соприкасаются даже в точке. А можно ли сделать такой образец для всех цифр в клетчатом прямоугольнике высоты 6 и ширины 8? (Цифры нельзя поворачивать и переворачивать)

Решение. Можно, см. рис.



2. Саше удалось сложить столбик из 56 монет, среди них три золотых: дирхем, риал и юань, все не с краю. Выше дирхема лежат на 1/20 больше монет, чем ниже риала. А выше юаня лежит на 15 монет больше, чем ниже него. Где и на сколько монет больше: между юанем и риалом или между юанем и дирхемом?

Ответ. Больше между юанем и риалом на 13. **Решение.** Пронумеруем монеты снизу вверх по порядку. Кроме юаня есть 55 монет, ниже него (55-15):2=20, значит, юань 21й. Число монет ниже риала делится на 20, это 20 или 40. Но 20 быть не может — столько ниже юаня. Значит, ниже риала 40, и он 41й, а выше дирхема 40+40:20=42, и дирхем 14й. Тогда между юанем и дирхемом 21-14-1=6 монет, а между юанем и риалом 41-21-1=19 монет. Значит, больше между юанем и риалом на 13 монет.

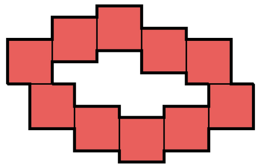
3. Всю поверхность прямоугольного кирпича удалось оклеить четырьмя квадратами без наложений (квадраты можно перегибать через ребро). Обязательно ли у кирпича есть квадратная грань?

Ответ. Не обязательно. **Решение.** Пусть размеры кирпича $1 \times 2 \times 4$. Тогда тройка граней 1×2, 4×2 и 1×2 образует прямоугольник 6×2, покрываемый тремя квадратами 2×2. А тройка других граней 1×4, 2×4 и 1×4 образует квадрат 4×4.

4. В полдень из разных мест пустились в путь две улитки. Они ползут весь день по одной прямой дороге, каждая со своей постоянной скоростью. В 1 час дня между ними было расстояние 1 дм, в 2 часа — 2 дм, в 4 часа — 8 дм (кажется необычным, но так случилось!). Найдите расстояние между местами старта.

Ответ. 4 дм. **Решение.** Расстояние между улитками тоже меняется с постоянной скоростью: до возможной встречи/обгона оно с этой скоростью убывает, после неё — с этой скоростью возрастает. Так как за час между 1 часом и 2 часами оно увеличилось на 1 дм, а за 2 часа между 2 и 4 часами — на 6 дм (то есть, 3 дм в час). Значит, встреча была между 1 и 2 часами, на первом промежутке (в этом случае изменение расстояния равно сумме, а не разности расстояний в крайних точках). Итак, в промежутках без встречи расстояние меняется со скоростью 3 дм/час. Значит, в промежутке от полудня до 1 часа расстояние уменьшалось, и уменьшившись на 3 дм стало 1 дм. Поэтому в момент старта расстояние было 3+1=4 дм.

5. Фигура на рисунке составлена из 10 одинаковых квадратов. Длина внешней границы фигуры составляет 152 см, а внутренней – 84 см. Найдите периметр одного квадрата.



Ответ. 34 см. **Решение.** Внешняя граница состоит из 14 целых сторон квадратов и 10 частей сторон. Внутренняя граница состоит из 6 целых сторон квадратов и 10 частей сторон. Совпадение числа частей не случайно: пары частей внутри и снаружи лежат на одном отрезке, по части которого соприкасаются квадраты. Длин части равна разности: длины отрезка минус сторона квадрата. Поэтому длины частей пары одинаковы. Значит, сумма длин частей одинакова для внутренней и внешней границ, её величина не влияет на разность длин границ. Значит, разность длин границ 152-84=68 см равна длине 14-6=8 целым сторонам. А периметр квадрата равен 4 целым сторонам, то есть вдвое меньше: 68:2=34 см.

6. Четырём мудрецам надели колпаки, на каждом цифра. Им сообщили, что цифры различны, и наибольшая равна сумме двух наименьших. Видя числа трёх остальных, на вопрос: «Можете ли определить своё число?» все одновременно ответили: «Нет». Какие числа могли быть написаны на колпаках? Найдите все варианты.

Ответ. 3, 4, 5 и 7. **Решение.** Обоснуем, что ответ подходит. Видя 4, 5, 7, можно иметь 3 или 9; видя 3, 5, 7, можно иметь 4 или 8; видя 3, 4, 7, можно иметь 5 или 6; видя 3, 4, 5, можно иметь 2 или 7. Другие четвёрки цифр $a < b < c < d$ с $a+b = d$ не подходят. Видя b, c, d, мудрец выбирает между a и $b+c$, поэтому $b+c \leqslant 9$. Но $d = a+b < a+c < b+c$, поэтому $d \leqslant 7$. Видя a, b, d, мудрец выбирает оставшееся число между числами b и d, их должно быть как минимум два, поэтому $b \leqslant d-3$, $a \leqslant d-4$. Тогда $d = a+b \leqslant (d-4)+(d-3) = 2d-7$, откуда $7 \leqslant d$. Значит, $d = 7$, $a = 3$, $b = 4$. Если $c = 6$, то видя 4, 6, 7, мудрец знает, что у него 3 (так 4+6=10 не вариант).

7. В ряд выписали 100 идущих подряд пятизначных чисел, меньших 20024. Оказалось, что если у всех этих чисел вычеркнуть первую цифру, то сумма получившихся чисел будет делиться на 3. Также оказалось, что если у всех этих чисел вычеркнуть последнюю цифру, то сумма получившихся чисел тоже будет делиться на 3. Докажите, что если вычеркнуть у всех чисел среднюю цифру, то сумма получившихся чисел тоже будет делиться на 3.

Решение. Обозначим суммы цифр в разряде единиц E, в разряде десятков D, в разряде сотен S, в разряде тысяч , в разряде десятков тысяч P тогда сумма всех выписанных чисел $A = 10000P + 1000T + 100S + 10D + E$. Заметим, что среди последних цифр наших чисел по 10 нулей, единиц, $\ldots$, девяток. Поэтому $E = 10(0 + 1 + 2 + \ldots + 9) = 450$ — делится на 3. Точно также $D = 450$ делится на 3. Сумма при вычеркивании последней цифры равна $E' = 1000P + 100T + 10S + D$ тоже делится на 3, поэтому и $A = 10E' + E$ делится на 3. Сумма при вычеркивании первых цифр $P' = 1000T + 100S + 10D + E$. Поскольку $A = 10000P + P'$, то $10000P$ делится на 3, значит, и P делится на 3. Цифры в первом (слева) могут быть равны 1 или 2. Количество двоек меньше 25. Но оно и не 0, так как сумма ста единиц не кратна 3. Значит, есть и единицы, и двойки, то есть среди 100 чисел есть число 20000. Во всех предшествующих числах вторая цифра равна 9, а, начиная с 20000, вторая цифра равна 0. Но сумма нулей и девяток делится на 3, то есть T кратно 3. При вычеркивании средних цифр получается сумма $1000P + 100T + 10D + E$, и так как P, T, D и E все делятся на 3, то и сумма делится на 3.