VII Европейский математический турнир «Покровское», 27 февраля – 4 марта 2024 г.

Математический турнир Европы

Математический бой №4. 7 – 8 классы. Гранд-лига. Бои за 1-4 места. 3 марта.

1. На стороне DE выпуклого четырехугольника $BDEC$ выбрана точка A, а на стороне BC — точка M. Отрезки AB и DM пересекаются в точке X, отрезки AC и EM — в точке Y. Известно, что $AD = AE = AX = AY = BC$ и $AB + AC = 3BC$. Докажите, что $DE \parallel BC$.

2. В остроугольном треугольнике ABC $AB < AC$. Точка M — середина отрезка BC, а точка N — середина дуги BC описанной окружности ABC, содержащей точку A. Точка D — основание биссектрисы угла A в треугольнике ABC. Точка P симметрична M относительно прямой ND и лежит внутри ABC. При условии, что $AP \perp BC$, найдите $\angle BAC$.

3. На прямой через равные промежутки стоят n напёрстков, под одним из которых спрятана конфета. За одну попытку можно показать на любые три напёрстка, и Дед Мороз честно скажет, который из них ближе к конфете (при равенстве укажет на «правый» из двух ближайших); если же конфета под одним из выбранных, Дед честно скажет под каким. При каком наибольшем n за 4 вопроса можно гарантированно выяснить, под каким наперстком конфета?

4. В графе для любых двух вершин A и B есть не более двух непересекающихся по вершинам путей из A в B. Докажите, что вершины графа можно покрасить в три цвета правильным образом (т.е. так, чтобы любые две вершины, соединенные ребром, оказались покрашены в разные цвета).

5. Докажите, что

$$\frac{1}{1\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{1}\right)+\sqrt{1}}+\frac{1}{2\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{n\cdot\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)+\sqrt{n}}<1.$$

6. Для ненулевых вещественных чисел a, b, c и нечётного натурального n оказалось, что

$$a^n(b+c)=b^n(c+a)=c^n(a+b).$$

Докажите, что $a = b = c$.

7. Сколько максимум различных чисел можно выбрать от 1 до 9996 так, чтобы для любой пары выбранных чисел их разность не была простым числом?

8. На доске написано натуральное число, большее 1. Каждую минуту Алиса стирает число x, записанное в данный момент на доске, и заменяет его на $\sqrt[3]{x}$, если x является точным кубом натурального числа; в противном же случае она заменяет x на $2x+1$. Докажите, что через некоторое время число на доске станет больше, чем 10^{100}.

VII Европейский математический турнир «Покровское», 27 февраля – 4 марта 2024 г.

Математический турнир Европы

Математический бой №4. 7 – 8 классы.
Гранд-лига: бои за 5-8 места. Первая лига: бои за 1-4 места.
3 марта.

1. Точки M, N, K — середины сторон BC, AB, AC треугольника ABC, причем $AB + AC = 3BC$. На отрезке MN выбрана точка X, а на отрезке MK — точка Y, так, что $MX = MY = MB = MC$. Докажите, что прямые BX, CY и NK пересекаются в одной точке.

2. Докажите, что любой треугольник можно разрезать на пять равнобедренных треугольников.

3. На прямой через равные промежутки стоят 66 напёрстков, под одним спрятана конфета. За одну попытку можно показать на любые три напёрстка, и Дед Мороз честно скажет, который из них ближе к конфете (при равенстве укажет на «правый» из двух ближайших); если же конфета под одним из выбранных, Дед честно скажет под каким. Как найти конфету не более чем за 3 попытки?

4. В каждой клетке доски 9×9 растет дерево высотой 1 сантиметр. Садовник и жук короед играют в игру, начинает садовник. В свой ход он может выбрать произвольную клетку доски и увеличить высоту дерева в этой клетке, а также в клетках, соседних с выбранной по стороне или вершине, на 1 сантиметр. Жук же в свой ход может уменьшить высоту любых 4 деревьев на 1 сантиметр. Назовем дерево *развившимся*, если его высота достигает не менее 2024 сантиметров, такие деревья жук короед обходит стороной. Докажите, что жук может действовать так, чтобы развившихся деревьев в любой момент было не больше 45.

5. Докажите, что

$$\frac{1}{1 \cdot \left(\sqrt{2}+\sqrt{1}\right)+\sqrt{1}}+\frac{1}{2 \cdot \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{n \cdot \left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)+\sqrt{n}}<1.$$

6. Про вещественные числа a, b и c известно, что $a \neq b$ и

$$a^2(b+c) = b^2(c+a) = 2024.$$

Найдите все возможные значения выражения $c^2(a+b)$.

7. Сколько максимум различных чисел можно выбрать от 1 до 2024 так, чтобы для любой пары выбранных чисел их разность не была простым числом?

8. Сумма Н:У+К:А+С:Л+О:Ж+И:М – целая (хотя некоторые слагаемые могут быть не целыми). Каково её наибольшее значение ? (Как обычно, разные буквы означают разные цифры)

Математический
турнир Европы

VII Европейский математический турнир «Покровское», 27 февраля – 4 марта 2024 г.

Математический бой №4. 7 – 8 классы.
Первая лига: бои за 5-8 места.
3 марта.

1. На стороне DE выпуклого четырехугольника $BDEC$ выбрана точка A, а на стороне BC — точка M. Отрезки AB и DM пересекаются в точке X, отрезки AC и EM — в точке Y. Известно, что $AD = AE = AX = AY = BC$ и $DE \parallel BC$. Докажите, что $AB + AC = 3BC$.

2. Докажите, что правильный треугольник можно разрезать на пять равнобедренных треугольников.

3. На прямой через равные промежутки стоят 46 напёрстков, под одним спрятана конфета. За одну попытку можно показать на любые два напёрстка, и Дед Мороз честно скажет, который из них ближе к конфете (при равенстве – скажет "правый"); если же конфета под одним из выбранных, Дед честно скажет под каким. Как найти конфету не более чем за 4 попытки?

4. В каждой клетке доски 9×9 растет дерево высотой 1 сантиметр. Садовник и жук короед играют в игру, начинает садовник. В свой ход он может выбрать произвольную клетку доски и увеличить высоту дерева в этой клетке, а также в клетках, соседних с выбранной по стороне или вершине, на 1 сантиметр. Жук же в свой ход может уменьшить высоту любых 4 деревьев на 1 сантиметр. Назовем дерево *развившимся*, если его высота достигает не менее 2024 сантиметров, такие деревья жук короед обходит стороной. Докажите, что жук может действовать так, чтобы развившихся деревьев в любой момент было не больше 45.

5. Алина записала пять различных целых чисел, так что для каждой тройки записанных чисел их произведение делится на 10. Покажите, что хотя бы одно из пяти записанных чисел делится на 10.

6. Про положительные числа a, b и c известно, что

$$a^4(b^3 + c) = b^4(c + a^3).$$

Докажите, что $a = b$.

7. Сколько максимум различных чисел можно выбрать от 1 до 2024 так, чтобы для любой пары выбранных чисел их разность не была простым числом?

8. Сумма Н:У+К:А+С:Л+О:Ж+И:М – целая (хотя некоторые слагаемые могут быть не целыми). Каково её наибольшее значение ? (Как обычно, разные буквы означают разные цифры)