VII Европейский математический турнир «Покровское», 27 февраля – 4 марта 2024 г.

Математический турнир Европы

Математический бой №2. 7 – 8 классы. Гранд-лига.
1 марта.

1. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ сумма углов A и D меньше $180°$, а биссектрисы углов A и D пересекаются на отрезке BC. Докажите, что $AB + CD < AD$.

2. В равнобедренном треугольнике ABC на основании BC выбрана точка D, а на отрезке AD выбрана точка E так, что $\angle BED = \angle BAC = 2\angle CED$. Найдите отношение $BE : AE$.

3. Дима и Кирилл играют в игру на доске 100×100. За один ход Дима (он ходит первым) вырезает из доски по линиям сетки клетчатый прямоугольник 1×10, а Кирилл — прямоугольник 1×11 (прямоугольники можно поворачивать). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может обеспечить себе победу независимо от действий соперника?

4. У продавца есть по две монеты каждого из 180 номиналов: $1, 2, 3, \ldots, 180$ талеров. Помогите ему разложить эти монеты в четыре столбика так, чтобы любую сумму от 1 до $180 \cdot 181$ талеров можно было набрать, сняв несколько (возможно 0) монет сверху каждого из столбиков.

5. Петя расставил по кругу числа $1, 2, 3, \ldots, 100$ в некотором порядке. Затем он выбрал натуральное число k. Для каждого числа в кругу a он записал в тетрадку число $2a + b - k$, где b — следующее за a число по часовой стрелке. Могли ли 100 записанных в тетрадке чисел оказаться равными $1, 2, 3, \ldots, 100$ в некотором порядке?

6. Сумма положительных чисел a, b и c равна 2. Докажите, что

$$ab + bc + 2ac \leqslant 2.$$

7. Найдите все тройки натуральных чисел (a, b, c), для которых $ab+1$, $bc+1$ и $ca+1$ — факториалы некоторых натуральных чисел.

8. Натуральное число n назовем *интересным*, если любое натуральное число, делящееся на какие-нибудь 70 чисел от $n + 1$ до $n + 100$, делится также и на n. Найдите все интересные n.

Математический турнир Европы

VII Европейский математический турнир «Покровское», 27 февраля – 4 марта 2024 г.

Математический бой №2. 7 – 8 классы. Первая лига.
1 марта.

1. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ на стороне AD выбраны точки E и F так, что $AE + FD = EF$, а на стороне BC выбрана точка X. Известно, что $AB \parallel EX$, $DC \parallel FX$, $\angle BAE = \angle BEX$, $\angle CDF = \angle CFX$. Докажите, что $\angle EXF = 90°$.

(Д. Ширяев)

2. В треугольнике ABC на стороне AB выбрана точка X, а на отрезке CX точка Y. Известно, что $\angle AYX = \angle ACB = 2\angle BYX$, и что $AY = 2CY$. Докажите, что $AC = BC$.

3. Имеется 10 одинаковых на вид монет. Известно, что 8 из них весят по 10г., а две — по 9г. Как найти 5 монет по 10г. за два взвешивания на чашечных весах без гирь?

4. У продавца имелось по 20 монет в $1, 2, 3, \ldots, 20$ тугриков. Он выбрал из них 18 монет и сложил в два столбика. Продавец утверждает, что какую бы сдачу от 1 до 100 тугриков от него ни потребовали, он сможет дать её, сняв монеты сверху одного или двух столбиков. Могут ли слова продавца быть правдой?

5. Петя расставил по кругу числа $1, 2, 3, \ldots, 10$ в некотором порядке. Для каждого числа в кругу a он записал в тетрадку число $2a+b-11$, где b — следующее за a число по часовой стрелке. Могли ли 10 записанных в тетрадке чисел оказаться равными $1, 2, 3, \ldots, 10$ в некотором порядке?

6. Про положительные числа x и y известно, что $y \leqslant 2$ и $x + y = 3$. Докажите, что

$$\sqrt{5-x} + \sqrt{2-y} \leqslant 2\sqrt{2}.$$

7. У прямоугольного параллелепипеда длины всех сторон являются натуральными числами. Каждую сторону параллелепипеда увеличили на одно и то же натуральное число k так, чтобы площадь поверхности параллелепипеда увеличилась на 122. Чему может быть равно k?

8. Натуральное число n назовем *интересным*, если любое число, кратное числам $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$, делится также и на n. Найдите все интересные n.