

**VII Европейский математический турнир
«Покровское», 27 февраля – 4 марта 2024 г.**



**Математический
турнир Европы**

**Математический бой №2. 7–8 классы. Гранд-лига.
1 марта.**

1. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ сумма углов A и D меньше 180° , а биссектрисы углов A и D пересекаются на отрезке BC . Докажите, что $AB + CD < AD$.

2. В равнобедренном треугольнике ABC на основании BC выбрана точка D , а на отрезке AD выбрана точка E так, что $\angle BED = \angle BAC = 2\angle CED$. Найдите отношение $BE : AE$.

3. Дима и Кирилл играют в игру на доске 100×100 . За один ход Дима (он ходит первым) вырезает из доски по линиям сетки клетчатый прямоугольник 1×10 , а Кирилл — прямоугольник 1×11 (прямоугольники можно поворачивать). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может обеспечить себе победу независимо от действий соперника?

4. У продавца есть по две монеты каждого из 180 номиналов: 1, 2, 3, ..., 180 талеров. Помогите ему разложить эти монеты в четыре столбика так, чтобы любую сумму от 1 до $180 \cdot 181$ талеров можно было набрать, сняв несколько (возможно 0) монет сверху каждого из столбиков.

5. Петя расставил по кругу числа 1, 2, 3, ..., 100 в некотором порядке. Затем он выбрал натуральное число k . Для каждого числа в кругу a он записал в тетрадку число $2a + b - k$, где b — следующее за a число по часовой стрелке. Могли ли 100 записанных в тетрадке чисел оказаться равными 1, 2, 3, ..., 100 в некотором порядке?

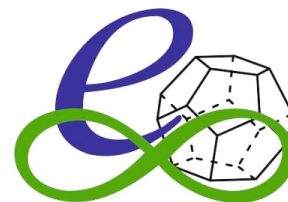
6. Сумма положительных чисел a , b и c равна 2. Докажите, что

$$ab + bc + 2ac \leq 2.$$

7. Найдите все тройки натуральных чисел (a, b, c) , для которых $ab+1$, $bc+1$ и $ca+1$ — факториалы некоторых натуральных чисел.

8. Натуральное число n назовем *интересным*, если любое натуральное число, делящееся на какие-нибудь 70 чисел от $n+1$ до $n+100$, делится также и на n . Найдите все интересные n .

**VII Европейский математический турнир
«Покровское», 27 февраля – 4 марта 2024 г.**



**Математический
турнир Европы**

**Математический бой №2. 7–8 классы. Первая лига.
1 марта.**

1. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ на стороне AD выбраны точки E и F так, что $AE + FD = EF$, а на стороне BC выбрана точка X . Известно, что $AB \parallel EX$, $DC \parallel FX$, $\angle BAE = \angle BEX$, $\angle CDF = \angle CFX$. Докажите, что $\angle EXF = 90^\circ$.

(Д. Ширяев)

2. В треугольнике ABC на стороне AB выбрана точка X , а на отрезке CX точка Y . Известно, что $\angle AYX = \angle ACB = 2\angle BYX$, и что $AU = 2CY$. Докажите, что $AC = BC$.

3. Имеется 10 одинаковых на вид монет. Известно, что 8 из них весят по 10г., а две — по 9г. Как найти 5 монет по 10г. за два взвешивания на чашечных весах без гирь?

4. У продавца имелось по 20 монет в 1, 2, 3, ..., 20 тугриков. Он выбрал из них 18 монет и сложил в два столбика. Продавец утверждает, что какую бы сдачу от 1 до 100 тугриков от него ни потребовали, он сможет дать её, сняв монеты сверху одного или двух столбиков. Могут ли слова продавца быть правдой?

5. Петя расставил по кругу числа 1, 2, 3, ..., 10 в некотором порядке. Для каждого числа в кругу a он записал в тетрадку число $2a + b - 11$, где b — следующее за a число по часовой стрелке. Могли ли 10 записанных в тетрадке чисел оказаться равными 1, 2, 3, ..., 10 в некотором порядке?

6. Про положительные числа x и y известно, что $y \leq 2$ и $x + y = 3$. Докажите, что

$$\sqrt{5-x} + \sqrt{2-y} \leq 2\sqrt{2}.$$

7. У прямоугольного параллелепипеда длины всех сторон являются натуральными числами. Каждую сторону параллелепипеда увеличили на одно и то же натуральное число k так, чтобы площадь поверхности параллелепипеда увеличилась на 122. Чему может быть равно k ?

8. Натуральное число n назовем *интересным*, если любое число, кратное числам $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$, делится также и на n . Найдите все интересные n .