VII Европейский математический турнир «Покровское», 27 февраля – 4 марта 2024 года

Математический турнир Европы

Тур 2. 6 класс. Гранд-лига. 1 марта

1. У 64 кубиков каждая грань покрашена в один из N цветов. Известно, что для каждой пары цветов можно сложить из кубиков плиту $1 \times 8 \times 8$ так, чтобы её верхняя грань 8×8 была шахматно раскрашена как раз в эти два цвета. При каком наибольшем N такое возможно?

2. Натуральное число n назовем *интересным*, если каждое натуральное число, делящееся на какие-нибудь 70 чисел от $n + 1$ до $n + 100$, делится также и на n. Найдите все интересные числа n.

3. У прямоугольного параллелепипеда длины всех сторон являются натуральными числами. Каждую сторону параллелепипеда увеличили на одно и то же натуральное число k. Могла ли площадь поверхности параллелепипеда увеличиться на 2121212?

4. В клетках доски 10×10 расставлены различные натуральные числа. Назовем *квартетом* четыре клетки на пересечении двух строк и двух столбцов. Назовем квартет *хорошим*, если его клетки можно разбить на две пары, суммы чисел в которых будут равны. Какое наибольшее число хороших квартетов может быть?

5. В 100 бочках объемом 100 литров каждая суммарно налито 100 литров воды. Вася хочет перелить воду между бочками так, чтобы в каждой бочке был ровно 1 литр воды. Для этого он выбирает первую бочку, переливает часть ее содержимого в другую бочку (возможно, ничего не переливает) и закрывает первую бочку крышкой. Затем он выбирает вторую бочку и выливает часть ее содержимого в другую бочку (но не в первую, которая уже закупорена), а затем закупоривает ее. Затем Вася выбирает третью бочку, и так далее, в конце он просто закупоривает оставшуюся бочку. Верно ли, что такими действиями Вася всегда сможет осуществить свой план?

6. У продавца имелось по 20 монет достоинством 1, 2, 3, …, 20 тугриков. Он выбрал из них 18 монет и сложил в два столбика. Продавец утверждает, что какую бы сдачу от 1 до 100 тугриков от него не потребовали, он сможет дать её, сняв монеты сверху одного или двух столбиков. Могут ли слова продавца быть правдой?

7. Дано натуральное число k. По кругу в некотором порядке расставлены числа 1, 2, 3, …, 100. Каждое из 100 выписанных чисел умножили на 2, прибавили следующее по часовой стрелке число, вычли k и результат записали в тетрадку. Могли ли 100 выписанных в тетрадке чисел оказаться равными $1, 2, 3, \ldots, 100$?

8. На плоскости отметили точку P. Паша хочет провести n прямых, не проходящих через P, так, чтобы каждый луч, выходящий из P, пересекал хотя бы 10 проведенных прямых. При каком наименьшем n Паша может добиться желаемого?

VII Европейский математический турнир «Покровское», 27 февраля – 4 марта 2024 года

Математический турнир Европы

Тур 2. 6 класс. Первая лига.
1 марта

1. Имеется 16 одинаковых белых кубиков. Можно ли раскрасить их грани в 10 цветов так, чтобы для каждого цвета можно было выбрать 10 кубиков и сложить однослойный прямоугольник 2×5 нужного цвета сверху?

2. Натуральное число n назовем *интересным*, если каждое натуральное число, делящееся на какие-нибудь 7 чисел от $n+1$ до $n+10$, делится также и на n. Найдите все интересные числа n.

3. У прямоугольного параллелепипеда длины всех сторон являются натуральными числами. Каждую сторону параллелепипеда увеличили на одно и то же натуральное число k. Могла ли площадь поверхности параллелепипеда увеличиться на 244?

4. В клетках доски 10×10 расставлены различные натуральные числа. Назовем *квартетом* четыре клетки на пересечении двух строк и двух столбцов. Назовем квартет *хорошим*, если его клетки можно разбить на две пары, суммы чисел в которых будут равны. Какое наибольшее число хороших квартетов может быть?

5. В 100 бочках объемом 100 литров каждая суммарно налито 100 литров воды. Вася хочет перелить воду между бочками так, чтобы в каждой бочке был ровно 1 литр воды. Для этого он выбирает первую бочку, переливает часть ее содержимого в другую бочку (возможно, ничего не переливает) и закрывает первую бочку крышкой. Затем он выбирает вторую бочку и выливает часть ее содержимого в другую бочку (но не в первую, которая уже закупорена), а затем закупоривает ее. Затем Вася выбирает третью бочку, и так далее, в конце он просто закупоривает оставшуюся бочку. Верно ли, что такими действиями Вася всегда сможет осуществить свой план?

6. У продавца имелось по 20 монет достоинством 1, 2, 3, . . . , 20 тугриков. Он выбрал из них 18 монет и сложил в два столбика. Продавец утверждает, что какую бы сдачу от 1 до 100 тугриков от него не потребовали, он сможет дать её, сняв монеты сверху одного или двух столбиков. Могут ли слова продавца быть правдой?

7. По кругу в некотором порядке расставлены числа 1, 2, 3, . . . , 10. Каждое из 10 выписанных чисел умножили на 2, прибавили следующее по часовой стрелке число, вычли 11 и результат записали в тетрадку. Могли ли 10 выписанных в тетрадке чисел оказаться равными $1, 2, 3, \ldots, 100$?

8. У девочки Маши есть 10 бумажных фигурок. За оно действие она может выбрать одну фигурку и разрезать ее на 7 фигурок, либо выбрать 2 фигурки, и разрезать каждую из них на 4 фигурки, либо выбрать 3 фигурки, и разрезать каждую из них на 2 фигурки. Может ли у Маши через некоторое количество действий получиться 2024 фигурки?