VII Европейский математический турнир «Покровское», 27 февраля – 4 марта 2024 г.

Математический турнир Европы

Математический бой №1. 7 – 8 классы. Гранд-лига.
29 февраля.

1. Внутри неравнобедренного треугольника ABC выбрана точка P. Среди расстояний от вершин треугольника ABC до не содержащих их прямых AP, BP и CP нашлось k одинаковых чисел. Каково наибольшее возможное значение k?

2. В треугольнике ABC на стороне AC отмечена точка D, а на стороне BC — точка E. При этом $\angle ABC = \angle ADB$, $CD = 2BE$, $AD + BE = AE$. Найдите $\angle ABC$.

3. В ряд выстроились 100 человек, некоторые из которых рыцари (всегда говорят правду), а остальные — лжецы (всегда лгут). Первый сказал: «Среди остальных не менее одного лжеца», второй: «Среди остальных не более двух лжецов», третий: «Среди остальных не менее трех лжецов», четвертый: «Среди остальных не более четырех лжецов», и так далее вплоть до 99-го, который сказал: «Среди остальных не менее 99 лжецов», а 100-ый предпочел не высказываться. Можно ли про каждого определить, лжец он или рыцарь?

4. Четно или нечетно количество способов расставить во всех клетках доски 4×4 натуральные числа так, чтобы сумма чисел в каждой строке была не больше 100, и сумма чисел в каждом столбце была не больше 100?

5. Найдите все тройки вещественных чисел (a, b, c), удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{cases} a^4 - b^4 = c, \\ b^4 - c^4 = a, \\ c^4 - a^4 = b. \end{cases}$$

6. Положительные числа a, b и c таковы, что $a + b + c = 4$. Докажите, что

$$\frac{a^5 + 4ab^4}{a^4 + 3b^4} + \frac{b^5 + 4bc^4}{b^4 + 3c^4} + \frac{c^5 + 4ca^4}{c^4 + 3a^4} \leqslant 5.$$

7. Найдите все натуральные x, y, z и n и простые p для которых

$$(x^2 + 4y^2)(y^2 + 4z^2)(z^2 + 4x^2) = p^n.$$

8. Назовем несократимую дробь $\frac{a}{b}$ *особенной*, если дробь $\frac{a+2k}{b+2k}$ — несократимая для всех натуральных k. Сколько существует особенных дробей, у которых числитель, и знаменатель — натуральные числа, не превосходящие 127?

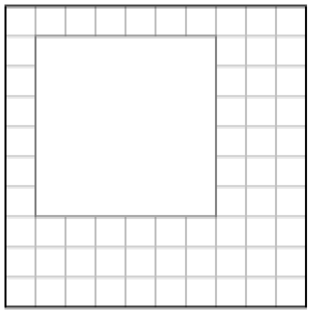
VII Европейский математический турнир «Покровское», 27 февраля – 4 марта 2024 г.

Математический турнир Европы

Математический бой №1. 7 – 8 классы. Первая лига.
29 февраля.

1. В треугольнике ABC выбрана точка P. Расстояние от точки X до прямой YZ будем обозначать $d(X, YZ)$. Известно, что $d(A, BP) = d(A, CP)$ и $d(B, AP) = d(C, AP)$. Верно ли, что треугольник ABC — обязательно равнобедренный?

2. Из квадратной доски 10×10 вырезали квадрат 6×6 так, как показано на рисунке. На какое наименьшее число частей можно разрезать по линиям сетки оставшуюся часть доски, чтобы из этих частей можно было сложить квадрат 8×8?



3. В ряд выстроились 100 человек, некоторые из которых рыцари (всегда говорят правду), а остальные — лжецы (всегда лгут). Первый сказал: «Среди остальных не менее одного лжеца», второй: «Среди остальных не более двух лжецов», третий: «Среди остальных не менее трех лжецов», четвертый: «Среди остальных не более четырех лжецов», и так далее вплоть до 99-го, который сказал: «Среди остальных не менее 99 лжецов», а 100-ый предпочел не высказываться. Можно ли про каждого определить, лжец он или рыцарь?

4. Четно или нечетно количество способов расставить во всех клетках доски 4×4 натуральные числа так, чтобы сумма чисел в каждой строке была не больше 100, и сумма чисел в каждом столбце была не больше 100?

5. Найдите все тройки вещественных чисел (a, b, c), удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{cases} a^4 - b^4 = c, \\ b^4 - c^4 = a, \\ c^4 - a^4 = b. \end{cases}$$

6. Положительные числа a, b и c таковы, что $a + b + c = 2$. Докажите, что

$$\frac{a^2b + 2ab^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2c + 2bc^2}{b^2 + c^2} + \frac{c^2a + 2ca^2}{c^2 + a^2} \leqslant 3.$$

7. Докажите, что при натуральных x и y выражение $(x^2 + 4y^2)(y^2 + 4x^2)$ не может быть равно 5^k, где k — нечетное натуральное число.

8. Назовем несократимую дробь $\frac{a}{b}$ *особенной*, если дробь $\frac{a+k}{b+k}$ — несократимая для всех натуральных k. Сколько существует особенных дробей, у которых числитель и знаменатель — натуральные числа, на превосходящие 100?