VII Европейский математический турнир «Покровское», 27 февраля – 4 марта 2024 года

Тур 1. 6 класс. Гранд-лига. 29 февраля

1. Среди 125 монет, одинаковых на вид, одна весит 5 г, другая 2 г, а каждая из остальных по 1 г. Можно ли гарантированно найти монету массой 5 г за не более чем 7 взвешиваний на чашечных весах без гирь?

2. Можно ли отметить на плоскости 10 точек и провести 18 прямых так, чтобы было ровно 4 отмеченных точки, через каждую из которых проходят ровно 3 прямые, и ровно 6 отмеченных точек, через которые проходят ровно 6 прямых?

3. Компьютер должен напечатать на ленте подряд без пробелов все числа от 1 до миллиона: 123456789101112131415. . . . Но принтер печатает двойку как пробел, у него получаются отдельные группы цифр: 1 345678910111 13141516171819 0 1 3 4 . . . . Какое наибольшее количество цифр может быть в одной группе?

4. В ряд выстроились 100 человек, некоторые из которых рыцари (всегда говорят правду), а некоторые лжецы (всегда лгут). Первый сказал: «среди остальных не менее одного лжеца», второй: «среди остальных не более двух лжецов», третий: «среди остальных не менее трех лжецов», четвертый: «среди остальных не более четырех лжецов», и так далее вплоть до 99-го, который сказал: «среди остальных не менее 99 лжецов», а 100-ый предпочел не высказываться. Можно ли про каждого определить, лжец он или рыцарь?

5. В Джиннистане живут маги. Каждый маг дружит ровно с 10 другими магами; для любых 10 магов найдется маг, который дружит с каждым из этих 10. Сколько магов может быть в Джиннистане?

6. При каких натуральных n можно записать числа $1, 2, \ldots, n$ в строку так, чтобы каждые два соседних числа отличались на 2 или на 3?

7. У каждого натурального числа, не превосходящего $4N$, посчитали количество сомножителей в его разложении на простые множители (множители могут быть одинаковыми, так, у числа $24 = 2^3 \cdot 3$ получается 4 сомножителя). Докажите, что по крайней мере у N чисел количество сомножителей оказалось нечётным.

8. Игорь выписал на доску правильную несократимую дробь. За одно действие он увеличивает или уменьшает числитель и знаменатель дроби на 1. То есть из дроби $\frac{a}{b}$ можно получить $\frac{a-1}{b-1}$, $\frac{a-1}{b+1}$, $\frac{a+1}{b-1}$, $\frac{a+1}{b+1}$, если новая дробь будет оставаться положительной. За какое наименьшее число действий Игорь может гарантированно получить сократимую дробь? Дробь называется сократимой, если у ее числителя и знаменателя есть общий натуральный делитель, **больший** 1.

VII Европейский математический турнир «Покровское», 27 февраля – 4 марта 2024 года

Математический турнир Европы

Тур 1. 6 класс. Первая лига. 29 февраля

1. Среди 25 монет, одинаковых на вид, одна весит 5 г, другая 2 г, а каждая из остальных по 1 г. Как найти монету массой 5 г за 5 взвешиваний на чашечных весах без гирь?

2. Буйволу, мулу и ламе дали две одинаковые копны сена. Если буйвол будет есть одну копну, а мул и лама – другую, то они закончат одновременно. Если буйвол с ламой будут есть одну копну, а мул – другую, то первые закончат, когда мулу останется ещё полкопны. Во сколько раз быстрее ламы съедят копну буйвол с мулом?

3. Компьютер должен напечатать на ленте подряд без пробелов все числа от 1 до миллиона: 123456789101112131415. . . . Но принтер печатает двойку как пробел, у него получаются отдельные группы цифр: 1 345678910111 13141516171819 0 1 3 4 . . . . Какое наибольшее количество цифр может быть в одной группе?

4. В ряд выстроились 100 человек, некоторые из которых рыцари (всегда говорят правду), а некоторые лжецы (всегда лгут). Первый сказал: «среди остальных не менее одного лжеца», второй: «среди остальных не более двух лжецов», третий: «среди остальных не менее трех лжецов», четвертый: «среди остальных не более четырех лжецов», и так далее вплоть до 99-го, который сказал: «среди остальных не менее 99 лжецов», а 100-ый предпочел не высказываться. Можно ли про каждого определить, лжец он или рыцарь?

5. В Джиннистане живут маги. Каждый маг дружит ровно с 10 другими магами; для любых 10 магов найдется единственный маг, который дружит с каждым из этих 10. Сколько магов может быть в Джиннистане?

6. Можно ли записать числа $1, 2, 3, \ldots, 2023$ в строку так, чтобы каждые два соседних числа отличались на 2 или на 3?

7. У каждого натурального числа, не превосходящего $4N$, посчитали количество сомножителей в его разложении на простые множители (множители могут быть одинаковыми, так, у числа $24 = 2^3 \cdot 3$ получается 4 сомножителя). Докажите, что по крайней мере у N чисел количество сомножителей оказалось нечётным.

8. Игорь выписал на доску все правильные несократимые дроби со знаменателем, меньшими 100 (то есть все дроби $\dfrac{a}{b}$, где $a < b < 100$ — взаимно простые натуральные числа). Назовем дробь $\dfrac{a}{b}$ *полностью несократимой*, если дробь $\dfrac{a+k}{b+k}$ несократимая для всех натуральных k. Сколько полностью несократимых дробей Игорь выписал на доску? Дробь называется сократимой, если у ее числителя и знаменателя есть общий натуральный делитель, **больший** 1.