VI Европейский математический турнир
г. Великий Новгород, 25 февраля – 2 марта 2023 г.

Математический бой №4. 7 – 8 классы. Гранд-лига. Бой за 1 место.

2 марта

1. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали перпендикулярны и пересекаются в точке E. Точка P на стороне AD такова, что $PE = EC$. Точка Q на отрезке AP такова, что $\angle BQC + \angle ACD = 90^\circ$. Отрезки AE и BQ пересекаются в точке R, причем $\angle CAD = \angle EPR$. Докажите, что $\angle BCD = 90^\circ$.

2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle B = \angle D = 120^\circ$. Точки A', B', C' симметричны D относительно BC, CA, AB соответственно. Докажите, что прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке.

3. Дано натуральное k. В зале собралось несколько человек. Оказалось, что все попарные расстояния между ними различны. Каждый упорядочил для себя всех остальных в порядке от ближайшего до самого дальнего от себя, и послал сообщение k-му по счету человеку в этом списке. Какое наибольшее количество сообщений могло прийти одному и тому же человеку?

4. Пусть A — конечное множество натуральных чисел. Разбиение A на два непересекающихся подмножества A_1 и A_2 называется *разделяющим*, если наименьшее общее кратное всех элементов A_1 равно наибольшему общему делителю всех элементов A_2. Оказалось, что для множества A существует ровно 2023 разделяющих разбиения. Какое наименьшее количество элементов может быть в A?

5. Докажите, что для положительных чисел $a_1, \ldots, a_{100}$ выполнено неравенство:

$$\sum_{i=1}^{100} \frac{a_i^4 + a_{i+3}^4 + 6}{a_{i+1} + a_{i+2}} \geqslant 400.$$

(индексы зациклены по модулю 100, т.е. $a_{101} = a_1, a_{102} = a_2$ и т.д.)

6. У Васи есть набор из 100 карточек, на которых по одному разу написаны все числа от 1 до 100 и древний компьютер, в который можно вставить карточку с числом a, а затем карточку с числом b, и компьютер уничтожив эти две карточки напечатает новую карточку с числом $\frac{a}{ab+1}$. Вася сначала вставил в компьютер две карточки из своего набора, а затем проделывал следующие операции: сначала вставлял в компьютер последнюю напечатанную Компьютером карточку, а затем — какую-то карточку из своего набора. В конце концов у Васи осталась только одна карточка. Расстроеный уничтожением своего набора Вася показал её своему лучшему другу Пете и попросил восстановить число на самой первой карточке, вставленной в компьютер. Петя знает, каким был изначальный набор карточек, но последовательность действий Васи ему неизвестна. Всегда ли он сможет выполнить просьбу друга?

7. Последовательности (a_n) и (b_n) натуральных чисел таковы, что для всех $n \geqslant 1$ выполняются равенства

$$a_{n+1} = a_n^{99} + b_n, \quad b_{n+1} = b_n^{99} + a_n.$$

Докажите, что если a_1 и b_1 не делятся на 101, то $a_1 a_2 \ldots a_{100} - b_1 b_2 \ldots b_{100}$ делится на 101.

8. В каждую клетку таблицы 2023×2023 записано нечётное (не обязательно положительное) число. Дима посчитал суммы чисел в каждом столбце и записал полученные 2023 числа в свой блокнот. Оля посчитала суммы чисел в каждой строке и тоже записала полученные 2023 числа в свой блокнот. Могло ли так случиться, что произведение чисел в блокноте Оли в сумме с произведением чисел в блокноте Димы равно нулю?

VI Европейский математический турнир
г. Великий Новгород, 25 февраля – 2 марта 2023 г.

European Math Tournament
25 February - 02 March 2023
Veliky Novgorod, Russia

Математический бой №4. 7 – 8 классы. Гранд-лига. Бой за 3 место.

2 марта

1. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC выбраны точки C_1, A_1, B_1 соответственно так, что $AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A = 2$. Точка P внутри ABC такова, что площади четырехугольников AB_1PC_1, BC_1PA_1 и CA_1PB_1 равны. Докажите, что P — точка пересечения медиан треугольника ABC.

2. В треугольнике ABC $\angle ABC = 60°$, $\angle ACB = 45°$. Точка T на продолжении BC за точку C такова, что $BC = CT$. Точка M — середина AT. Найдите $\angle BMC$.

3. В зале собралось 12 человек. Оказалось, что все попарные расстояния между ними различны. Каждый упорядочил для себя всех остальных в порядке от ближайшего до самого дальнего от себя, и послал сообщение второму по счету человеку в этом списке. Могли ли все сообщения прийти одному и тому же человеку?

4. Жёсткий диск Васиного компьютера представляет из себя клетчатую полоску размера 1×2023 для записи данных. Вася хочет установить 1010 программ, занимающих соответственно $1, 2, \ldots, 1010$ подряд идущих ячеек на жёстком диске (причём порядок их установки выбирает Вася, а позиции для установки — сам жёсткий диск). Как только Вася устанавливает новую программу, все программы, установленные ранее и пересекающиеся с новой хотя бы по одной ячейке, навсегда перестают работать. Жёсткий диск хочет, чтобы после установки всех программ как можно большее количество из них осталось рабочими. Сколько рабочих программ сможет обеспечить жёсткий диск вне зависимости от действий Васи?

5. В книжке меньше 100 страниц. Желая получше изучить цифры, маленький Даня вырвал из книжки несколько листов. В номерах вырванных страниц каждая из цифр от 0 до 9 встретилась ровно по два раза. Какое наименьшее число листов мог вырвать Даня? Страницы в книге пронумерованы по порядку, начиная с 1. На каждом листе два номера страниц: с одной стороны нечётный, с другой — больший на 1 чётный.

6. У Васи есть набор из 100 карточек, на которых по одному разу написаны все числа от 1 до 100 и древний компьютер, в который можно вставить карточку с числом a, а затем карточку с числом b, и компьютер уничтожив эти две карточки напечатает новую карточку с числом $\frac{a}{ab+1}$. Вася сначала вставил в компьютер две карточки из своего набора, а затем проделывал следующие операции: сначала вставлял в компьютер последнюю напечатанную Компьютером карточку, а затем — какую-то карточку из своего набора. В конце концов у Васи осталась только одна карточка. Расстроеный уничтожением своего набора Вася показал её своему лучшему другу Пете и попросил восстановить число на самой первой карточке, вставленной в компьютер. Петя знает, каким был изначальный набор карточек, но последовательность действий Васи ему неизвестна. Всегда ли он сможет выполнить просьбу друга?

7. Последовательности (a_n) и (b_n) натуральных чисел таковы, что для всех $n \geqslant 1$ выполняются равенства

$$a_{n+1} = a_n^{99} + b_n, \quad b_{n+1} = b_n^{99} + a_n.$$

Докажите, что если a_1 и b_1 не делятся на 101, то $a_1 a_2 \ldots a_{100} - b_1 b_2 \ldots b_{100}$ делится на 101.

8. В каждую клетку таблицы 2023×2023 записано нечётное (не обязательно положительное) число. Дима посчитал суммы чисел в каждом столбце и записал полученные 2023 числа в свой блокнот. Оля посчитала суммы чисел в каждой строке и тоже записала полученные 2023 числа в свой блокнот. Могло ли так случиться, что произведение чисел в блокноте Оли в сумме с произведением чисел в блокноте Димы равно нулю?

VI Европейский математический турнир
г. Великий Новгород, 25 февраля – 2 марта 2023 г.

Математический бой №4. 7 – 8 классы. Гранд-лига: бои за 5 – 8 места. Первая лига.

2 марта

1. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC выбраны точки C_1, A_1, B_1 соответственно так, что $AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A = 2$. Точка P внутри ABC такова, что площади четырехугольников AB_1PC_1, BC_1PA_1 и CA_1PB_1 равны. Докажите, что P — точка пересечения медиан треугольника ABC.

2. В четырехугольнике $ABCD$ точка M — середина стороны BC, причем $\angle AMD = 90^\circ$. Докажите, что если $\angle BAM < \angle DAM$, то $\angle CDM < \angle ADM$.

3. Перед Игорем и Димой стоят 2023 стакана с кофе. Игорь начинает и своим ходом выпивает один стакан. Своим ходом любой игрок может выпить от 1 до $k + 1$ стаканов кофе, где k — количество стаканов, выпитых другим игроком на **прошлом** шаге. Побеждает тот, кто выпьет последний стакан. Кто из игроков может победить, как бы ни играл соперник?

4. Жёсткий диск Васиного компьютера представляет из себя клетчатую полоску размера 1×2023 для записи данных. Вася хочет установить 1010 программ, занимающих соответственно $1, 2, \ldots, 1010$ подряд идущих ячеек на жёстком диске (причём порядок их установки выбирает Вася, а позиции для установки — сам жёсткий диск). Как только Вася устанавливает новую программу, все программы, установленные ранее и пересекающиеся с новой хотя бы по одной ячейке, навсегда перестают работать. Жёсткий диск хочет, чтобы после установки всех программ как можно большее количество из них осталось рабочими. Сколько рабочих программ сможет обеспечить жёсткий диск вне зависимости от действий Васи?

5. В книжке меньше 100 страниц. Желая получше изучить цифры, маленький Даня вырвал из книжки несколько листов. В номерах вырванных страниц каждая из цифр от 0 до 9 встретилась ровно по два раза. Какое наименьшее число листов мог вырвать Даня? Страницы в книге пронумерованы по порядку, начиная с 1. На каждом листе два номера страниц: с одной стороны нечётный, с другой — больший на 1 чётный.

6. У Васи есть набор из 100 карточек, на которых по одному разу написаны все числа от 1 до 100 и древний компьютер, в который можно вставить карточку с числом a, а затем карточку с числом b, и компьютер уничтожив эти две карточки напечатает новую карточку с числом $\frac{a}{ab+1}$. Вася сначала вставил в компьютер две карточки из своего набора, а затем проделывал следующие операции: сначала вставлял в компьютер последнюю напечатанную Компьютером карточку, а затем — какую-то карточку из своего набора. В конце концов у Васи осталась только одна карточка. Расстроеный уничтожением своего набора Вася показал её своему лучшему другу Пете и попросил восстановить число на самой первой карточке, вставленной в компьютер. Петя знает, каким был изначальный набор карточек, но последовательность действий Васи ему неизвестна. Всегда ли он сможет выполнить просьбу друга?

7. В клетчатом квадрате 10×10 некоторые горизонтальные и вертикальные отрезки длины 10, идущие по линиям сетки, покрашены в синий и красный цвета, при этом контур квадрата остался чёрным. Если разрезать по всем синим отрезкам, квадрат распадётся на 30 частей, а если по всем красным — на 24 части. А на сколько частей распадётся квадрат, если разрезать и по всем синим, и по всем красным отрезкам?

8. В каждую клетку таблицы 2023×2023 записано нечётное (не обязательно положительное) число. Дима посчитал суммы чисел в каждом столбце и записал полученные 2023 числа в свой блокнот. Оля посчитала суммы чисел в каждой строке и тоже записала полученные 2023 числа в свой блокнот. Могло ли так случиться, что произведение чисел в блокноте Оли в сумме с произведением чисел в блокноте Димы равно нулю?