

VI Европейский математический турнир
г. Великий Новгород, 25 февраля – 2 марта 2023 года



Тур 4. 6 класс. Гранд-лига. Бои за 5–8 места.
2 марта

1. В клетчатом квадрате 10×10 некоторые горизонтальные и вертикальные отрезки длины 10 покрашены в синий и красный цвета, при этом контур квадрата остался чёрным. Если разрезать по всем синим отрезкам, квадрат распадётся на 30 частей, а если по всем красным — на 24 части. А на сколько частей распадётся квадрат, если разрезать и по всем синим, и по всем красным отрезкам?

2. Саша написал программу, которая по натуральному числу определяет наименьшее натуральное число, на которое введённое в программу число не делится. Например, при вводе в программу числа 6 на выход получаем 4, а при вводе числа 1 на выход получаем число 2. Саша ввёл какое-то натуральное число и случайно последовательно применил программу 3 раза. Найдите все варианты числа, которое на выходе мог получить Саша.

3. Из квадрата 5×5 вырезали центральный квадрат 3×3 . В оставшиеся 16 клеток расставили числа от 1 до 16, каждое по разу, так, что суммы в строках и столбцах по краям квадрата равны. Найдите минимальное значение суммы чисел в четырёх углах.

4. Имелось 1000 единичных кубиков, возможно не одинаковых. На каждой грани кубика написано натуральное число так, что на каждой паре противоположных граней сумма равна 52. Из кубиков сложили куб со стороной 10 так, что сумма на каждой паре примыкающих граней равна 50. Найдите сумму всех чисел на поверхности куба.

5. Желая лучше изучить цифры, маленький Даня вырвал из книжки несколько листов. На них в номерах страниц каждая из 10 цифр встретилась ровно по одному разу. Сколько листов вырвал Даня? Страницы в книге пронумерованы по порядку начиная с 1. На каждом листе два номера страниц: с одной стороны нечётный, с другой — больший на 1 чётный.

6. Имеется 23 печеньки, все они круглые, разного размера и с дырой в центре. Из стола торчат два вертикальных штыря, все печеньки в беспорядке насажены на два штыря, на каждой печенье есть. Разрешается делать ходы по такому правилу: за ход надо снять стопку из одного или нескольких печенек с верха одного штыря, причём в стопке размеры печенек должны возрасти сверху вниз и, не переворачивая, насадить стопку на другой штырь; при этом нижнее печенье стопки НЕ должно лечь на меньшее печенье (но может лечь на стол). Докажите, что не более чем за 44 хода можно собрать все печеньки на одном штыре так, чтобы размеры печенек возрастали сверху вниз.

7. Найдите все пары натуральных чисел k и n , для которых выполнено

$$n! + 2^k = (n + 1)!$$

8. Существуют ли 10 последовательных натуральных чисел таких, что сумма цифр ни одного из них не делится на 8?