VI Европейский математический турнир
г. Великий Новгород, 25 февраля – 2 марта 2023 года

Тур 4. 6 класс. Гранд-лига. Бои за 1–4 места.
2 марта

1. В клетчатом квадрате 10×10 некоторые горизонтальные и вертикальные отрезки длины 10 покрашены в синий и красный цвета, при этом контур квадрата остался чёрным. Если разрезать по всем синим отрезкам, квадрат распадётся на 30 частей, а если по всем красным — на 24 части. А на сколько частей распадётся квадрат, если разрезать и по всем синим, и по всем красным отрезкам?

2. Саша написал программу, которая по натуральному числу определяет наименьшее натуральное число, на которое введённое в программу число не делится. Например, при вводе в программу числа 6 на выход получаем 4, а при вводе числа 1 на выход получаем число 2. Саша ввёл какое-то натуральное число и случайно последовательно применил программу 3 раза. Найдите все варианты числа, которое на выходе мог получить Саша.

3. Из квадрата 5×5 вырезали центральный квадрат 3×3. В оставшиеся 16 клеток расставили числа от 1 до 16, каждое по разу, так, что суммы в строчках и столбцах по краям квадрата равны. Найдите минимальное значение суммы чисел в четырёх углах.

4. Желая получше изучить цифры, маленький Даня вырвал из книжки несколько листов. На них в номерах страниц каждая из 10 цифр встретилась ровно по одному разу. Сколько листов вырвал Даня? Страницы в книге пронумерованы по порядку начиная с 1. На каждом листе два номера страниц: с одной стороны нечётный, с другой — больший на 1 чётный.

5. Имеется 100 печенек двух сортов, все они круглые, разного размера и с дырой в центре. Из стола торчат два вертикальных штыря, все печеньки в беспорядке насажены на оба штыря. Разрешается делать ходы по такому правилу: за ход надо снять стопку из одного или нескольких печенек с верха одного штыря (в стопке размеры печенек должны возрастать сверху вниз) и, не переворачивая, насадить стопку на другой штырь; при этом нижнее печенье стопки НЕ должно лечь на меньшее печенье (но может лечь на стол). Докажите, что можно собрать печеньки каждого сорта на своём штыре так, чтобы размеры печенек на штырях возрастали сверху вниз.

6. Перед Игорем и Димой стоят 2023 стакана с кофе. Игорь начинает и своим ходом выпивает один стакан. Своим ходом любой игрок может выпить от 1 до $k+1$ стаканов кофе, где k — количество стаканов, выпитых другим игроком на прошлом шаге. Побеждает тот, кто выпьет последний стакан. Кто из игроков может победить, как бы ни играл соперник?

7. Найдите все пары натуральных чисел k и n, для которых выполнено

$$n! + 2^k = (n+1)!$$

8. У Васи есть набор из 100 карточек, на которых по одному разу написаны все числа от 1 до 100 и древний компьютер, в который можно вставить карточку с числом a, а затем карточку с числом b, и компьютер, уничтожив эти две карточки, напечатает новую карточку с числом $\dfrac{a}{ab+1}$. Вася сначала вставил в компьютер карточку 100, затем карточку 99, и после этого проделывал следующие операции: сначала вставлял в компьютер последнюю напечатанную Компьютером карточку, а затем — какую-то карточку из своего набора. В конце концов у Васи осталась только одна карточка. Какое число на ней может быть написано?