VI Европейский математический турнир
г. Великий Новгород, 25 февраля – 2 марта 2023 г.

Математический бой №3. 7 – 8 классы. Гранд-лига.
1 марта

1. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ диагонали AD, BE и CF пересекаются в точке O. Известно, что $OA = OB$, $OC = OD$ и $OE = OF$. Кроме того, $BC \parallel AD$ и $DE \parallel CF$. Докажите, что $AF \parallel EB$.

2. В треугольнике ABC $\angle A = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$. Точка D на стороне BC и точка E на отрезке AD таковы, что $AC = CE$ и $AE = ED$. Медианы треугольника ABD пересекаются в точке G. Найдите острый угол между прямыми CG и AD.

3. Соедините несколько городов дорогами так, чтобы выполнялись пять условий:

1. Городов четное число.
2. Из каждого города ведет ровно 4 дороги.
3. От любого города можно добраться до любого другого по дорогам.
4. Нет трех попарно соединенных дорогами городов.
5. Города невозможно разбить на пары так, чтобы в каждой паре города были соединены дорогой.

4. Остров Сокровищ представляет из себя квадрат 101×101, в одной из клеток которого Билли Бонс зарыл клад. Джон Сильвер хочет узнать, в какой клетке зарыт клад. Он стартует в центральной клетке Острова, и Билли сообщает ему, какое наименьшее число шагов (переходя из клетки в соседнюю по стороне) ему нужно сделать, чтобы дойти до клада. Джон делает шаг в одну из соседних по стороне клеток по своему выбору, Билли снова сообщает ему, сколько шагов до клада, и так далее. Для какого минимального k Джон может не более чем за k шагов гарантированно определить, в какой клетке находится клад?

5. Грузоподъемность одного грузовика — 30 тонн. Имеется несколько грузов суммарным весом 270 тонн, каждый весом не более 7 тонн, которые нужно разместить на 11 грузовиках, не превысив их грузоподъемность. Всегда ли этого можно добиться?

6. Оля обнаружила на своём калькуляторе необычную кнопку с операцией $\star$, которая вычисляет значение $a \star b$ для любых вещественных a и b. Оказалось, что для любых вещественных a, b и c выполняется равенство
$$(a \star b) \star c = a + b + c + 2.$$
Докажите, что для любых вещественных a и b верно равенство $a \star b = a + b + 1$.

7. Найдите все такие тройки натуральных чисел (m, p, q), что p и q простые, и выполняется условие
$$2^m p^2 + 1 = q^5$$

8. Обозначим за $f(n)$ наибольший нечетный делитель натурального числа n. Докажите, что сумма $f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(2^{50})$ кратна 3.

VI Европейский математический турнир
г. Великий Новгород, 25 февраля – 2 марта 2023 г.

Математический бой №3. 7 – 8 классы. Первая лига.
1 марта

1. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ диагонали AD, BE и CF пересекаются в точке O. Известно, что $OA = OB$, $OC = OD$ и $OE = OF$. Кроме того, $BC \parallel AD$ и $DE \parallel CF$. Докажите, что $AF \parallel EB$.

2. В равнобедренном треугольнике ABC $\angle ABC = 90°$. Точки D и E — середины сторон AC и AB соответственно. Точка F внутри четырехугольника $BCDE$ такова, что треугольник DEF равносторонний. Прямые BF и AC пересекаются в точке X, отрезки AF и BD пересекаются в точке Y. Докажите, что $DX = DY$.

3. По кругу расположены 1001 монета, все орлом вверх. Петя и Вася играют в игру, начинает Петя. Каждым ходом Петя может перевернуть произвольную монету решкой вверх. Вася может своим ходом перевернуть одну монету орлом вверх, но только если эта монета — соседняя с только что перевернутой Петей монетой. Какое наибольшее количество монет Петя сможет расположить решкой вверх после нескольких ходов, независимо от действий Васи?

4. Остров Сокровищ представляет из себя квадрат 101×101, в одной из клеток которого Билли Бонс зарыл клад. Джон Сильвер хочет узнать, в какой клетке зарыт клад. Он стартует в центральной клетке Острова, и Билли сообщает ему, какое наименьшее число шагов (переходя из клетки в соседнюю по стороне) ему нужно сделать, чтобы дойти до клада. Джон делает шаг в одну из соседних по стороне клеток по своему выбору, Билли снова сообщает ему, сколько шагов до клада, и так далее. Для какого минимального k Джон может не более чем за k шагов гарантированно определить, в какой клетке находится клад?

5. Трем мудрецам написали на лбу по числу, и сообщили, что числа различны, натуральны, меньше 100 и одно равно произведению двух других. Видя числа двух других, на вопрос «Можете ли определить своё число?» все одновременно ответили «Нет». Какие числа были на лбах?

6. Оля обнаружила на своём калькуляторе необычную кнопку с операцией $\star$, которая вычисляет значение $a \star b$ для любых вещественных a и b. В инструкции к калькулятору написано, что для любых вещественных a и b верно

$$(a \star b) + a = 2(a + (b \star a)).$$

Найдите $5 \star 9$.

7. Найдите наименьшее такое n, что $a_1 a_2 \ldots a_{15} \cdot (a_1^n + a_2^n + \ldots + a_{15}^n)$ делится на 15 при любых натуральных a_i.

8. Обозначим за $f(n)$ наибольший нечетный делитель натурального числа n. Докажите, что сумма $f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(2^{50})$ кратна 3.