VI Европейский математический турнир
г. Великий Новгород, 25 февраля – 2 марта 2023 г.

Математический бой №2. 7 – 8 классы. Гранд-лига.
28 февраля

1. В параллелограмме $ABCD$ $AC = BC$, $\angle ACB < 90^\circ$. Точка E на продолжении BC за точку C такова, что $CE = 2BC$. Точка F такова, что $EF \perp AC$ и $DF \perp BC$. Докажите, что $\angle BAF = \angle ACB$.

2. В треугольнике ABC $AB = AC$. Внутри него отмечена такая точка D, что $DA \cdot BC = DB \cdot AC = DC \cdot AB$. Найдите $\angle ABD$.

3. В каждой клетке доски 100×100 стоит натуральное число (числа могут повторяться). Клетка называется *равновесной*, если число в ней является наибольшим (не обязательно строго) в своей строке и наименьшим (тоже не обязательно строго) в своем столбце. Может ли на доске быть ровно 2023 равновесных клетки?

4. Рассмотрим множество M, состоящее из всех 2^{100} последовательностей длины 100, составленных из нулей и единиц. Подмножество A множества M изначально содержит какие-то 50 таких последовательностей. За одну операцию можно добавить в A последовательность, которая хотя бы от двух последовательностей, уже находящихся в A, отличается ровно в одном разряде. Докажите, что найдется последовательность из M, которую невозможно добавить в A при помощи таких операций.

5. Монетный двор Превеликого Новгорода планирует денежную реформу: выпуск монет трёх различных номиналов, каждый из которых измеряется натуральным числом копеек, и выпуск стандартного кошелька, в который помещается k любых монет. Денежная реформа *удалась*, если можно выбрать, какие монеты положить в кошелек так, чтобы любую покупку, которая стоит целое число от 1 до 1000 копеек, можно было ими оплатить без сдачи. При каком наименьшем k денежную реформу удастся провести?

6. Про множество S известно следующее:

- существуют натуральные a и b такие, что $a < b$ и $\frac{a}{b} \in S$;
- если число x содержится в S, то и числа $\frac{1}{x+1}$ и $\frac{x}{x+1}$ содержатся в S.

Найдите все пары натуральных a и b, для которых множество S содержит в себе все рациональные числа из интервала $(0, 1)$.

7. Найдите все пары простых чисел p, q, для которых $p^3 + q^3$ делится на $(p + q)^2$.

8. Даны пять различных стозначных чисел A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, начинающихся на одну и ту же цифру. Сумму этих пяти чисел обозначили через S. Оказалось, что S делится на A_1, A_2, A_3 и A_4. На какую цифру начинается число S?

VI Европейский математический турнир
г. Великий Новгород, 25 февраля – 2 марта 2023 г.

Математический бой №2. 7 – 8 классы. Первая лига.
28 февраля

1. В остроугольном треугольнике ABC точка H — основание высоты из точки B. Точки M, K, N — середины AB, BH, HC соответственно. Найдите отношение площадей треугольников MKN и ABH.

2. В треугольнике ABC $AB = AC$. Внутри него отмечена такая точка D, что $DA \cdot BC = DB \cdot AC = DC \cdot AB$. Найдите $\angle ABD$.

3. В клетки доски 10×10 расставили натуральные числа от 1 до 100 (каждое по одному разу). Дима нашёл наибольшее число в каждом столбце и записал эти 10 чисел в свой блокнот. Оля нашла наименьшее число в каждой строке и тоже записала эти 10 чисел свой блокнот. Оказалось, что наименьшее число в Димином блокноте равно наибольшему числу в Олином блокноте. Чему могло оказаться равно это число? Найдите все возможные ответы и докажите, что других нет.

4. Каждый из 151 школьника посещает ровно 10 различных кружков. При этом для любых двух школьников найдётся кружок, который посещают они оба. Оказалось, что кружок математики посещает не меньше детей, чем любой другой. Может ли в кружке математики заниматься ровно 16 школьников?

5. Монетный двор Превеликого Новгорода планирует денежную реформу: выпуск монет двух различных номиналов, каждый из которых измеряется натуральным числом копеек, и выпуск стандартного кошелька, в который помещается k любых монет. Денежная реформа *удалась*, если можно выбрать, какие монеты положить в кошелек так, чтобы любую покупку, которая стоит целое число от 1 до 99 копеек, можно было ими оплатить без сдачи. При каком наименьшем k денежную реформу удастся провести?

6. На доске написано число $1/3$. Если в какой-то момент на доске оказалось число x, то можно его стереть, и написать на доску или число $1/(x+1)$, или число $1-x$. Можно ли за несколько операций получить на доске число $1/2$?

7. Найдите все пары натуральных чисел a, b, для которых $a^3 + b^3 = (a+b)^2$.

8. Даны пять различных четырёхзначных чисел A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, начинающихся на одну и ту же цифру. Оказалось, что их сумма S делится на A_1, A_2, A_3 и A_4. Может ли число S быть пятизначным?