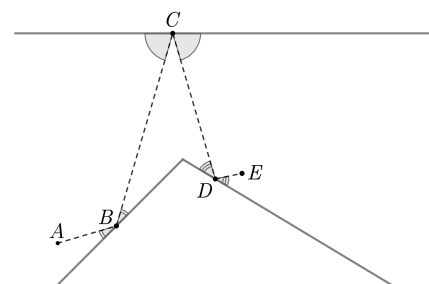


VI Европейский математический турнир
г. Великий Новгород, 25 февраля – 2 марта 2023 г.

Математический бой №1. 7–8 классы. Гранд-лига.
27 февраля

1. Геодезист Миша оказался в высокой пещере с горизонтальным потолком. Путь ему преграждает гора треугольной формы (см. рисунок: Миша находится в точке A). Мише нужно выпустить луч лазера из точки A так, чтобы отразившись от одного склона горы в точке B , затем от потолка в точке C , и затем от другого склона горы в точке D , луч продолжил движение вдоль той же прямой, вдоль которой начал (на рисунке точки A, B, D, E должны оказаться на одной прямой.) Луч отражается от горы и потолка по принципу «угол падения равен углу отражения». Докажите, что положение точки C на потолке будет одним и тем же, где бы ни находился Миша.



2. В треугольнике ABC точка M – середина стороны AB . Точки D и E выбраны на сторонах AC и BC соответственно. Оказалось, что $\angle DME = \angle ACB$ и $AD + DM = BE + EM$. Найдите отношение $AB : DE$.

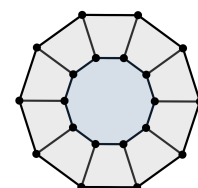
3. На устной олимпиаде 2023 школьника получили одинаковые варианты из шести задач. За решение каждой задачи давался один балл. Когда олимпиада закончилась, оказалось, что любые трое детей в совокупности решили хотя бы пять задач. Какое наименьшее значение может принимать итоговая сумма всех баллов, набранных участниками?

4. На пир прибыло неограниченное количество рыцарей в сияющих доспехах (всегда говорят правду) и лжецов, облаченных в черные балахоны (всегда лгут). Руслан расставил по кругу 101 из них по своему выбору, остальные остались в качестве зрителей. Затем Руслан и Людмила ходят по очереди, начинает Людмила. Каждым ходом надо вставить куда-нибудь в круг зрителя. После того, как Руслан и Людмила сделают по k ходов, всех в круг спрашивают: «Кто твой сосед справа — рыцарь или лжец?». Людмила выигрывает, если больше ответов «Лжец», Руслан — если «Рыцарь», при равенстве — ничья. При каком наименьшем k Людмила гарантировано сможет обеспечить себе победу?

5. Бесконечная последовательность натуральных чисел a_0, a_1, a_2, \dots такова, что $a_0 = 1$ и $a_n = kn + (-1)^n a_{n-1}$ для любого $n \geq 1$. При каких натуральных k в этой последовательности обязательно встретится число 2023?

6. Для положительных чисел a_1, a_2, \dots, a_n с суммой 1 докажите неравенство

$$\frac{a_1^3 + a_2^3}{a_1^2 + a_2^2} + \frac{a_2^3 + a_3^3}{a_2^2 + a_3^2} + \dots + \frac{a_n^3 + a_1^3}{a_n^2 + a_1^2} \geq 1.$$



7. Найдите все натуральные m, n и k , удовлетворяющие соотношению

$$n!m! = n! + m! + k!$$

8. Числа от 1 до 20 расставлены в узлах фигуры, изображенной на рисунке, каждое по одному разу. При каком наибольшем натуральном k можно утверждать, что обязательно найдутся два числа, стоящие в узлах соединенных отрезком, которые отличаются не менее, чем на k ?

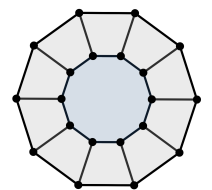


VI Европейский математический турнир
г. Великий Новгород, 25 февраля – 2 марта 2023 г.

Математический бой №1. 7–8 классы. Первая лига.
27 февраля

1. На продолжении стороны AB за точку B квадрата $ABCD$ отметили точку N такую, что $AB = BN$. А на продолжении стороны DA за точку A — K такую, что $DA = AK$. Отрезки CK и DN пересекаются в точке P . Докажите, что треугольник APK равнобедренный.
2. В треугольнике ABC точка D — середина стороны AB , причем $\angle CDB > 90^\circ$. На отрезке AC выбрана произвольная точка E . Докажите, что $AE + DE < CD + BC$.
3. В школе учатся несколько мальчиков и девочек. Как-то раз 115 из них пришли на дискотеку. Оказалось, что на дискотеку пришло ровно $3/4$ от всех девочек, а количество мальчиков, пришедших на дискотеку, в сумме с количеством не пришедших девочек составляет ровно половину от всех учеников школы. Докажите, что количество мальчиков, не пришедших на дискотеку, делится на 5.
4. На пир прибыло 100 рыцарей в сияющих доспехах (всегда говорят правду) и 200 лжецов, облаченных в черные балахоны (всегда лгут). Сто лжецов сразу встали в круг, а остальные остались в качестве зрителей. Руслан и Людмила ходят по очереди, начинает Людмила. Каждым ходом надо вставить куда-нибудь в круг зрителя. После того, как оба игрока сделают по 50 ходов, всех в круге спрашивают «Кто твой сосед справа — рыцарь или лжец?». Людмила выигрывает, если больше ответов «Лжец», Руслан — если «Рыцарь», при равенстве — ничья. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник?
5. Бесконечная последовательность натуральных чисел a_0, a_1, a_2, \dots такова, что $a_0 = 1$ и $a_n = kn + (-1)^n a_{n-1}$ для любого $n \geq 1$. При каких натуральных k в этой последовательности обязательно встретится число 2023?

6. У Малыша и Карлсона есть 10 коробок, в каждой от 20 до 23 конфет. Докажите, что Карлсон может съесть не более 3 конфет, после чего раздать себе и Малышу по 5 коробок так, чтобы раздать при этом поровну конфет.



7. Найдите все натуральные m , n и k , удовлетворяющие соотношению

$$n!m! = n! + k!$$

8. Числа от 1 до 20 расставлены в узлах фигуры, изображенной на рисунке, каждое по одному разу. При каком наибольшем натуральном k можно утверждать, что обязательно найдутся два числа, стоящие в узлах соединенных отрезком, которые отличаются не менее, чем на k ?