VI Европейский математический турнир
г. Великий Новгород, 25 февраля – 2 марта 2023 г.

Командная олимпиада. 7 – 8 классы. Решения.
26 февраля

1. *В феврале 253 школьника поехали на турнир в Великий Новгород. Всех ребят рассадили по нескольким автобусам так, что в каждый автобус село поровну школьников, а лучшие друзья Вася и Петя оказались в одном и том же автобусе. Но по дороге 5 автобусов сломались, а еще 8 потерялись. Все остальные добрались благополучно. Сколько автобусов доехало?*

Ответ. 10. **Решение.** Поскольку $253 = 11 \cdot 23$, в каждом автобусе может быть 1, 11, 23 или 253 школьника. Первый случай невозможен, поскольку Вася и Петя ехали вместе. Последние два невозможны, поскольку тогда автобусов слишком мало: либо 11, либо 1, что всяко меньше чем $5+8=13$. Значит, в каждом автобусе по 11 школьников, а тогда всего автобусов 23. Значит, доехало $23-5-8=10$.

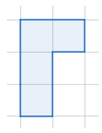
2. *При каких натуральных k можно разрезать килограмм колбасы на 3 куска так, чтобы при любом выкладывании одного, двух или трёх кусков на двухчашечные весы одна чаша была тяжелее другой не менее, чем на k грамм? (Куски не обязательно весят целое число грамм! Одну из чаш весов разрешается оставлять пустой.)*

Ответ. $1 \leqslant k \leqslant 142$. **Решение. Пример.** Возьмем куски веса k, $2k$, $1000-3k$. Легко убедиться, что условие выполняется, поскольку $1000-3k \geqslant 4k$. **Оценка.** Обозначим веса кусков в порядке неубывания $x \leqslant y \leqslant z$. Тогда $x \geqslant k$, $y \geqslant x+k \geqslant 2k$, $z \geqslant y+k \geqslant 3k$. Кроме того, $x+y$ и z отличаются хотя бы на k, соответственно, есть два случая. Первый: пусть $x+y \geqslant z+k$. Тогда $1000 = x+y+z \geqslant z+k+z \geqslant 3k+k+3k = 7k$, откуда $k \leqslant 142$. Второй случай: $x+y \leqslant z-k$, т.е. $z \geqslant x+y+k \geqslant k+2k+k = 4k$. Тогда $1000 = x+y+z \geqslant k+2k+4k = 7k$, и снова $k \leqslant 142$.

3. *В трапеции $ABCD$ основание BC равно боковой стороне AB. Точки E и F — середины сторон BC и AD соответственно, причем точка F лежит на биссектрисе угла ABC. Чему равно отношение BD/EF?*

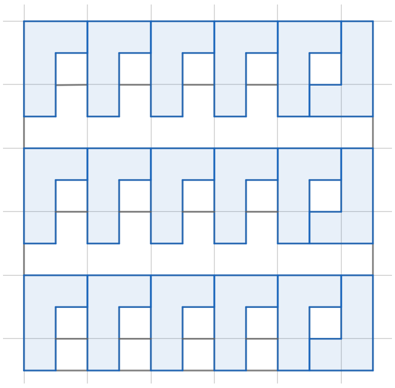
Ответ. 2. **Решение.** $\angle ABF = \angle CBF = \angle AFB$ (как накрест лежащие), поэтому треугольник ABF равнобедренный, $AB = AF$. Значит, $ABCF$ — ромб, а $BCDF$ — параллелограмм. Пусть M — середина CF. Тогда $BD = 2BM = 2EF$ (последнее равенство следует из того, что в равнобедренном BCF равны медианы), а значит $BD : EF = 2$.

4. *Из доски 2023×2023 вырезали все клетки, находящиеся на пересечениях столбцов и строк с чётными номерами (строки пронумерованы снизу вверх от 1 до 2023, а столбцы — слева направо от 1 до 2023). Какое наибольшее количество фигурок Г-тетрамино (см. рисунок) можно вырезать из оставшейся части доски? Фигурки можно поворачивать и переворачивать.*



Ответ.
512072. **Решение.** Покрасим клетки в шахматном порядке (пусть вырезанные клетки были черными). Пусть $2023 = 4k+3$, где $k = 505$. Изначально на доске $((4k+3)^2+1)/2 = 8k^2+12k+5$ черных клеток, из них $(2k+1)^2 = 4k^2+4k+1$ вырезали, значит $4k^2+8k+4$ черных клеток осталось. Каждая Г-тетраминошка занимает ровно две черные клетки, значит их поместится не более $(4k^2+8k+4)/2 = 2k^2+4k+2 = 2(k+1)^2 = 2 \cdot 506^2 = 512072$. Приведем пример, в котором все невырезанные черные клетки покрыты Г-тетраминошками, а значит он сходится с оценкой. На рисунке приведен пример для доски 11×11, который легко обобщается на случай любого $4k+3 \times 4k+3$.

5. *В остроугольном треугольнике ABC $AB = AC$, точка H — основание высоты из точки B. На отрезке BH нашлась такая точка D, что $AB = 2BD$ и $BC = 2CD$. Найдите $\angle BCD$.*



Ответ. $30°$. **Решение.** Пусть точка D' симметрична D относительно прямой BC. Тогда $\angle DBD' = 2\angle DBC = 2(90° - \angle BCA) = \angle BAC$. Поэтому $BAC \sim DBD'$ (как равнобедренные треугольники с равным углом при вершине), причем коэффициент подобия равен 2, т.к. $AB : BD = 2$. Значит, $BC : DD' = 2$, откуда $DD' = CD = CD'$. Значит, треугольник DCD' равносторонний, и CB в нем биссектриса, откуда $\angle BCD = 30°$.

6. *Будем называть натуральное число достойным внимания, если оно делится на квадраты всех своих простых делителей. Докажите, что есть бесконечно много таких натуральных чисел a, что a и $a+1$ достойны внимания.*

Решение. Одно такое a найти легко: например $a = 8$ и $a+1 = 9$ оба хорошие. Будем последовательно строить новые пары хороших соседних чисел. Пусть a и $a+1$ хорошие. Тогда пара $4a(a+1)$ и $4a(a+1)+1 = (2a+1)^2$ тоже оба хорошие. Так мы последовательно найдем бесконечно много пар соседних хороших чисел.

7. *В Тридесятом Царстве 30 городов, некоторые из которых соединены дорогами (между любыми двумя городами не более одной дороги). Для любых четырех городов количество дорог, которые их соединяют друг с другом, делится на 3 (в частности, может оказаться 0). Из городов Великий Новгород и Нижний Новгород ведет хотя бы по три дороги. При каком наибольшем k можно утверждать, что в Тридесятом Царстве гарантированно найдется k попарно соединенных дорогами городов?*

Ответ. 29. **Решение. Пример** на 29: Один город не соединен ни с чем, остальные попарно соединены.

Оценка составляет основную часть решения. Заведем граф, в котором города это вершины, а ребра — дороги. Пусть K_n — максимальный полный подграф. Разберем два случая.

Первый случай: $n \geqslant 3$. Если $n \leqslant 28$, то возьмем вершину A, не лежащую в K_n, но смежную с K_n. Применяя условие к вершине A, смежной с ней вершине в K_n и еще паре вершин из K_n убеждаемся, что A смежна со всеми вершинами в K_n, что противоречит его максимальности. Если же таких вершин A нет, то ни одна вершина снаружи K_n не смежна с K_n. Возьмем две вершины снаружи K_n и две вершины K_n — получим противоречие (в этой четверке не менее 1, но не более 2 ребер). Значит, в этом случае размер максимального K_n не менее 29, что и требовалось.

Второй случай: $n \leqslant 2$, т.е. в графе нет треугольников. Если в графе есть циклы, то рассмотрим наименьший цикл C_m. Если $m \geqslant 6$, то можно выбрать в C_m первую, вторую, четвертую и пятую вершины по циклу, — их будут соединять всего 2 ребра, противоречие. Если $m = 4$, сразу получаем противоречие. Значит, $m = 5$. Пусть вершины C_5 это A, B, C, D, E в порядке обхода по циклу. Применяя условие к A, B, C, X, где X вершина вне C_5, убеждаемся, что X соединена хотя бы с одной из вершин C_5, НУО с A. Тогда применяя условие к A, X, C, D получаем противоречие: обязательно найдется цикл меньшего размера.

Если же в графе вообще нет циклов, то это дерево. Подвесим его за Великий Новгород (V), и пусть N — Нижний Новгород, и A — сосед V не в одной подветке с N, а B и C — потомки N. Тогда четверка V, A, B, C приводит к противоречию — в ней всего 1 ребро.

8. *Положительные числа a, b, c удовлетворяют условию*

$$\sqrt{1+ab} + \sqrt{1+bc} + \sqrt{1+ca} = 3(a+b+c)/2.$$

Докажите, что $a^2+b^2+c^2 \geqslant 2$.

Решение. Пусть, от противного, $a^2+b^2+c^2 < 2$. Тогда

$$\sqrt{1+ab} > \sqrt{(a^2+b^2+c^2)/2+ab} = \sqrt{((a+b)^2+c^2)/2} \geqslant (a+b+c)/2$$

(по неравенству о среднем квадратическом и среднем арифметическом для чисел $a+b$ и c). Аналогично, каждый из корней в левой части неравенства не меньше $(a+b+c)/2$, значит их сумма не меньше $3(a+b+c)/2$. Но по условию она равна $3(a+b+c)/2$, значит все неравенства обращаются в равенства. В частности, $a+b=c$, $b+c=a$, $c+a=b$ (только в этом случае неравенство о средних квадратическом и арифметическом обращается в равенство). Складывая, получаем $a+b+c=0$, что невозможно при положительных a, b, c.