VI Европейский математический турнир
г. Великий Новгород, 25 февраля – 2 марта 2023 года

Командная олимпиада. 6 класс. Решения
26 февраля

1. Из Ёлкино в Палкино выехали одновременно два велосипедиста со скоростью 16 км/ч. Устав, оба сбросили скорость до 8 км/ч. Но один из них сбросил скорость на середине пути, а другой ехал с той и другой скоростью одинаковое время. В Палкино они прибыли с интервалом в 5 мин. Найдите расстояние от Ёлкино до Палкино.

Ответ. 8 км. **Решение.** Заметим, что второй велосипедист проехал 2/3 всего пути со скоростью 16 км/ч и 1/3 всего пути со скоростью 8 км/ч. Тогда понятно, что первый велосипедист проехал на 1/6 пути больше, чем второй со скоростью 16 км/ч, и соответственно на 1/6 меньше со скоростью 8 км/ч. Тогда, если весь путь равен x, то второй велосипедист пришел на $x/(6 \cdot 8) - x/(6 \cdot 16) = x/96$ часов раньше. Переведя минуты в часы, получаем уравнение $x/96 = 1/12$, откуда $x = 8$ км.

2. Можно ли разрезать 1 килограмм колбасы на 3 куска так, чтобы при любом выкладывании на двухчашечные весы одного, двух или трёх кусков одна чаша была тяжелее другой больше чем на 150 грамм?

Ответ. Не могут. **Решение.** Рассмотрим все возможные наборы из кусков. Поскольку каждый кусок мы либо берем, либо не берем, то всего таких наборов 8. При этом по условию любые два набора должны отличаться хотя бы на 150 грамм (если в наборах есть общие куски, то выкинем их и положим на две чаши оставшиеся куски). Тогда вес самого большого набора (всей колбасы) больше $150 \cdot (8 - 1) = 1050$ грамм — противоречие.

3. Известно, что НАЙДИ>ЦИФРЫ, Н>А>Й>Д>И, Ц>И>Ф>Р>Ы. Сколькими способами можно заменить буквы на цифры (разные — на разные, одинаковые — на одинаковые) так, чтобы все неравенства выполнялись?

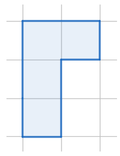
Ответ. 40 способов. **Решение.** Разных букв 9, поэтому есть 10 вариантов выбрать отсутствующую цифру. Наименьшие 4 цифры из оставшихся определяются однозначно: это И>Ф>Р>Ы. Наибольшая тоже выбирается без вариантов — это Н. Цифра Ц может быть любой из оставшихся — 4 варианта. После выбора Ц остальные расставляются однозначно: А>Й>Д. Для каждого из 10 вариантов отсутствующей цифры есть три варианта для Ц, поэтому всего вариантов $10 \cdot 4 = 40$.

4. Петя записал на доску числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 — именно в таком порядке. Он может поменять местами два *соседних* числа, если их разность нечётна или если их сумма делится на 3. Может ли Петя за несколько операций получить те же числа, но в обратном порядке?

Ответ. Не сможет. **Решение.** Заметим, что если ему удастся это сделать, в какой-то момент числа 1 и 7 (или 2 и 8) должны будут поменяться местами. Но разрешенными операциями это сделать невозможно.

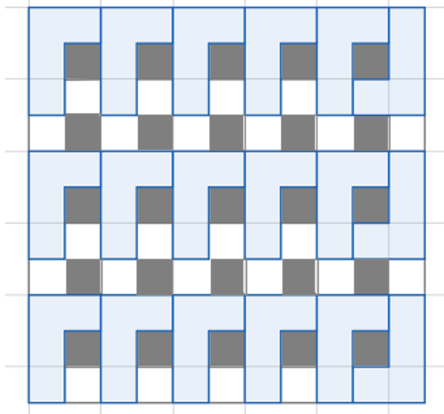
5. На доске написано число 2023. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За ход Петя может уменьшить число на доске на 2 или на 3, а Вася — вдвое или втрое. Нельзя получать дробные и отрицательные числа. Кто **не сможет** сделать хода — выигрывает. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник?

Ответ. Выигрывает Петя. **Решение.** Ему достаточно каждым ходом уменьшать число до кратного 2 (в частности — уменьшить до 0). Тогда у Васи есть ход, поэтому он не выиграл. Если Вася оставит Пете число большее 1, Петя сыграет по указанной стратегии. Если же Вася оставит Пете число 0 или 1, то у Пети нет хода и он выиграл.



6. Из доски 11×11 вырезали все клетки, находящиеся на пересечениях столбцов и строк с чётными номерами (строки пронумерованы снизу вверх от 1 до 11, а столбцы — слева направо от 1 до 11). Какое наибольшее количество фигурок Г-тетрамино (см. рисунок) можно вырезать из оставшейся части доски? Фигурки можно поворачивать и переворачивать.

Ответ. 18. **Решение.** Покрасим клетки в шахматном порядке (пусть вырезанные клетки были черными). Изначально на доске 61 черная клетка, из них 25 вырезали, значит $61 - 25 = 36$ черных клеток осталось. Каждая Г-тетраминошка занимает ровно две черные клетки, значит их поместится не более $36/2 = 18$. Пример, в котором все невырезанные черные клетки покрыты Г-тетраминошками, изображён справа.



7. Семья из 6 человек ночью подошла к подвесному мосту, способному выдержать не более двух человек одновременно. По мосту можно идти только с фонариком. По одиночке они переходят мост в одну сторону за разное время: за 1, 2, 3, 4, 5 и 6 минут соответственно. Когда идут вдвоем, то движутся со скоростью более медленного. Каждый согласен пройти по мосту не более 3 раз (то есть, туда-обратно-туда). Фонарик только один. За какое наименьшее число минут они все смогут переправиться на другую сторону моста?

Ответ. За 28 мин. **Решение.** Сначала приведём пример на 28 минут. Пронумеруем людей от 1 до 6 (столько минут человек тратит на переход), $>$ переход туда, $<$ переход обратно. Вот последовательность переходов: $1+2 > 1 < 3+4 > 4 < 5+6 > 3 < 3+4 > 2 < 1+2 >$. Всего затрачено $2+1+4+4+6+3+4+2+2 = 28$ минут.

Теперь докажем, что меньше чем за 28 минут справиться не получится. За переходы обратно-туда по другую сторону моста добавляется не больше одного человека. Это значит, что переходов обратно было не менее четырёх. Так как никто не ходил обратно дважды, минимальное время, которое мы затратим на обратные переходы, равно $1+2+3+4 = 10$ минут.

Теперь рассмотрим переходы туда. Предположим, что переходов туда было хотя бы 6. Тогда на возвращение уже затрачивается хотя бы $1+2+3+4+5 = 15$ минут. При этом на переходы туда уже затрачено хотя бы $1+1+2+2+3+6 = 15$ минут. Тогда всего затрачено не меньше 30 минут. Если же переходов было ровно 5, то каждый переход осуществляли двое людей, а возвращались все по одному. Предположим, что было хотя бы 3 перехода, на каждый из которых было затрачено не более 3 минут. Поскольку все переходы осуществлялись по двое, в каждом таком переходе участвовали люди с номерами от 1 до 3. Тогда другие переходы они не осуществляли. И оставшиеся 3 человека также переходили еще два раза, причем один раз переходил человек 6. Тогда суммарное время на переходы туда не меньше $3+3+2+4+6 = 18$ минут, то есть общее время не меньше 28 минут.

И наконец, если переходов туда, на которые было затрачено не больше 3 минут, было не больше 2, то суммарное время перехода туда было не меньше, чем $2+2+4+4+6=18$ минут. Мы опять получили, что общее время перехода не меньше 28 минут.

8. Будем называть натуральное число *достойным внимания*, если оно делится на квадраты всех своих простых делителей. Докажите, что есть бесконечно много таких натуральных чисел a, что оба числа a и $a+1$ достойны внимания.

Решение. Одно такое a найти легко: например $a=8$ и $a+1=9$ оба хорошие. Будем последовательно строить новые пары хороших соседних чисел. Пусть a и $a+1$ хорошие. Тогда пара $4a(a+1)$ и $4a(a+1)+1=(2a+1)^2$ тоже оба хорошие. Так мы последовательно найдем бесконечно много пар соседних хороших чисел.