VI Европейский математический турнир
г. Великий Новгород, 25 февраля – 2 марта 2023 года

Командная олимпиада. 5 класс. Решения
26 февраля

1. В феврале 253 школьника поехали на турнир в Великий Новгород. Всех ребят рассадили по нескольким автобусам так, что в каждый автобус село поровну школьников, а лучшие друзья Вася и Петя оказались в одном и том же автобусе. Но по дороге несколько автобусов сломались и к началу турнира успели только 115 школьников. Сколько автобусов сломалось?

Ответ. 6 автобусов. **Решение.** Пусть в один автобус посадили n школьников. По условию в каждом автобусе хотя бы 2 школьника. Поскольку во всех автобусах поровну школьников, 253 делится на n и 115 делится на n, тогда $253-2\cdot 115=23$ делится на n. Так как число 23 — простое, получаем $n=23$. Тогда понятно, что сломалось $(253-115)/23=6$ автобусов.

2. Известно, что НАЙДИ<ЦИФРЫ, Н>А>Й>Д>И, Ц>И>Ф>Р>Ы. Сколькими способами можно заменить буквы на цифры (разные — на разные, одинаковые — на одинаковые) так, чтобы все неравенства выполнялись?

Ответ. 10 способов. **Решение.** Разных букв 9, поэтому есть 10 вариантов выбрать отсутствующую цифру. Из первого неравенства следует, что Ц>Н. Тогда оставшиеся цифры однозначно выстраиваются в цепочку: Ц>Н>А>Й>Д>И>Ф>Р>Ы.

3. Из Ёлкино в Палкино выехали одновременно два велосипедиста со скоростью 16 км/ч. Устав, оба сбросили скорость до 8 км/ч. Но один из них сбросил скорость на середине пути, а другой ехал с той и другой скоростью одинаковое время. В Палкино они прибыли с интервалом в 15 мин. Найдите расстояние от Ёлкино до Палкино.

Ответ. 24 км. **Решение.** Заметим, что второй велосипедист проехал $2/3$ всего пути со скоростью 16 км/ч и $1/3$ всего пути со скоростью 8 км/ч. Тогда понятно, что первый велосипедист проехал на $1/6$ пути больше, чем второй со скоростью 16 км/ч, и соответственно на $1/6$ меньше со скоростью 8 км/ч. Тогда, если весь путь равен x, то второй велосипедист приехал на $x/(6\cdot 8)-x/(6\cdot 16)=x/96$ часов раньше. Переведя минуты в часы, получаем уравнение $x/96=1/4$, откуда $x=24$ км.

4. На доске написано число 2023. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За ход Петя может уменьшить число на доске на 2 или на 3, а Вася — вдвое или втрое. Нельзя получать дробные и отрицательные числа. Кто **не сможет** сделать хода — выигрывает. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник?

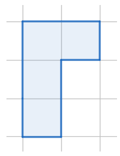
Ответ. Выигрывает Петя. **Решение.** Ему достаточно каждым ходом уменьшать число до чётного (в частности — уменьшить до 0). Тогда у Васи есть ход, поэтому он не выиграл. Если Вася оставит Пете число, большее 1, то Петя сыграет по указанной стратегии. Если же Вася оставит Пете число 1 или 0, то у Пети нет хода и он выиграл.

5. Можно ли разрезать 1 килограмм колбасы на 3 куска так, чтобы при любом выкладывании на чашечные весы одного, двух или трёх кусков одна чаша была тяжелее другой больше чем на 140 граммов?

Ответ. Можно. **Решение.** Пусть $a = 1000/7$ г. Годится набор кусков веса a, $2a$, $4a$. Также подходит набор 141, 282 и 577 г.

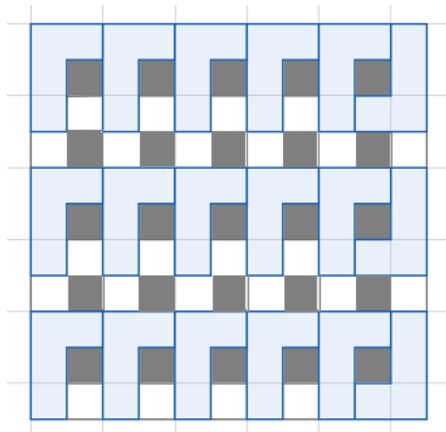
6. Семья из 6 человек ночью подошла к подвесному мосту, способному выдержать не более двух человек одновременно. По мосту можно идти только с фонариком. По одиночке они переходят мост в одну сторону за разное время: за 1, 2, 3, 4, 5 и 6 минут соответственно. Когда идут вдвоем, то движутся со скоростью более медленного. Каждый согласен пройти по мосту не более 3 раз (то есть, туда-обратно-туда). Фонарик только один. Как им всем перебраться меньше чем за полчаса?

Решение. Пронумеруем людей от 1 до 6 (столько минут человек тратит на переход), $>$ переход туда, $<$ переход обратно. Вот последовательность переходов: $1{+}2 > 1 < 3{+}4 > 4 < < 5 + 6 > 3 < 3 + 4 > 2 < 1 + 2 >$. Всего затрачено $2 + 1 + 4 + 4 + 6 + 3 + 4 + 2 + 2 = 28$ минут.



7. Из доски 11×11 вырезали все клетки, находящиеся на пересечениях столбцов и строк с чётными номерами (строки пронумерованы снизу вверх от 1 до 11, а столбцы — слева направо от 1 до 11). Какое наибольшее количество фигурок Г-тетрамино (см. рисунок) можно вырезать из оставшейся части доски? Фигурки можно поворачивать и переворачивать.

Ответ. 18. **Решение.** Покрасим клетки в шахматном порядке (пусть вырезанные клетки были черными). Изначально на доске 61 черная клетка, из них 25 вырезали, значит $61 - 25 = 36$ черных клеток осталось. Каждая Г-тетраминошка занимает ровно две черные клетки, значит их поместится не более $36/2 = 18$. Пример, в котором все невырезанные черные клетки покрыты Г-тетраминошками, изображён справа.



8. Числа $1, 2, \ldots, 20$ расставлены по кругу в данном порядке по часовой стрелке. Можно поменять два соседних числа местами, если их сумма — составное число. Можно ли через несколько действий получить порядок $1, 2, \ldots, 20$, но уже против часовой стрелки?

Ответ. Нет, нельзя. **Решение.** Рассмотрим четыре числа: 3, 14, 17, 20. Заметим, что сумма любой пары соседних чисел, в том числе 3 и 20, — простое число. Поэтому никакие два числа нельзя поменять местами. Значит, они так и будут идти по кругу в указанном порядке (именно по часовой стрелке), и противоположный порядок получить нельзя.