V Европейский математический турнир
г. Ярославль, 14–19 марта 2022 года

Командная олимпиада. Сеньоры. Решения
15 марта

1. Компьютер напечатал в строчку все пятизначные числа 10 000, 10 001, …, 99 999 подряд без пробелов между числами. В полученной строке можно подчеркнуть группу из 7 цифр подряд: 1000010, 0000100, 0001000, …, 9899999. Докажите, что любая группа встречается менее 10 раз.

Решение. Зная место стыка в группе (5 вариантов), место в последовательности однозначно восстанавливается. Поэтому каждая группа из 7 цифр встречается не более 5 раз.

2. Внутри квадрата $ABCD$ отметили точку P так, что $AP = AB$ и $\angle CPD = 90^\circ$. Докажите, что $DP = 2CP$.

Пусть T — середина отрезка DP. Так как треугольник APD равнобедренный, то $\angle ATD = 90^\circ$. Также $\angle ADT = 90^\circ - \angle CDP = \angle DCP$. Следовательно, в треугольниках ADT и DCP равны углы и $AD = CD$. Значит, треугольники равны и $CP = DT = \frac{1}{2}DP$.

3. По кругу расставлено 1001 число, каждое из которых равно 1 или -1. Петя посчитал для каждой пары соседних чисел их произведение, сложил полученные результаты и получил число, меньшее 0. Какое максимальное значение может принимать сумма всех изначальных чисел?

Ответ. 499. **Решение.** *Пример:* 1 1 1 -1 …1 1 1 -1 1 1 -1 1 -1 (249 групп по 1 1 1 -1 и 1 1 -1 1 -1 в конце). В данном примере сумма произведений соседних чисел равна $249 \cdot (1 + 1 - 1 - 1) + 1 - 1 - 1 - 1 - 1 = -3 < 0$, а сумма чисел равна $249 \cdot 2 + 1 = 499$.

Оценка: Пусть пары соседних чисел $(1, -1)$ и $(-1, 1)$ будут типа A, а пары $(1, 1)$ и $(-1, -1)$ — типа B. Из условия следует, что количество пар типа A больше, чем пар типа B. Также пар типа A чётное количество. Поэтому пар типа A хотя бы 502, а значит, пар типа B не более 499. Осталось заметить, что сумма всех чисел равна полусумме чисел во всевозможных парах соседних чисел, которая не больше 499, так как сумма чисел в парах типа A равна 0, а в парах типа B — не более 2.

4. Одно и то же нечётное число разделили с остатком на каждое из чисел 2, 3, …, 1000. Все полученные остатки оказались различными, при этом один из них равен нулю. Докажите, что нулевой остаток получился при делении на число, большее 500.

Решение. Предположим, что нулевой остаток получился при делении на $n \leqslant 500$. Изначальное число нечётное, поэтому и n нечётно, а остаток при делении на $2n$ равен n. Заметим, что остаток при делении на 2 — 0 или 1, а 0 уже есть. Значит, остаток при делении на 2 равен 1. Остаток при делении на 3 — 0, 1 или 2, а 0 и 1 уже есть. Значит, остаток при делении на 3 равен 2. Продолжая рассуждения, получим, что остаток при делении на i равен $i - 1$ для любого $i < n$. Остаток при делении на $n + 1$ не больше n, а числа от 0 до $n - 2$ и n уже есть. Следовательно, остаток при делении на $n + 1$ равен $n - 1$. Но нечётное число не может давать чётный остаток при делении на чётное число, противоречие.

5. В стране 2022 города, каждые два из них соединены дорогой. Два начальника ГИБДД по очереди издают приказы. Пётр своим приказом может закрыть все дороги, выходящие из одного города, а Василий — открыть не более двух любых закрытых ранее дорог. Может ли Василий действовать так, чтобы после каждого его приказа между любыми двумя городами существовал путь (возможно, проходящий через другие города)?

Ответ. Да, может. **Решение.** Пронумеруем города от 1 до 2022 и рассмотрим путь P из 1 города в 2022, проходящий по всем городам в порядке возрастания номеров. Заметим, что Пётр каждым приказом закрывает не более 2 дорог из P. Следовательно, Василий своим приказом может восстановить все закрытые дороги P. Поэтому после приказов Василия будет сохраняться путь P и между любыми двумя городами всегда будет путь.

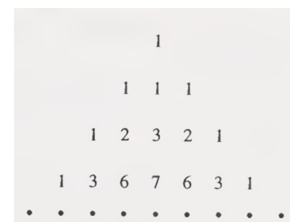
6. Имеется четыре различных двузначных числа. Сумма двух кратных пяти в 5 раз больше суммы двух не кратных пяти. Сумма двух чётных в 2 раза больше суммы двух нечётных. Найдите эти числа.

Ответ. 11, 12, 35 и 80. **Решение.** Ясно, что числа, кратные 5, не могут быть оба чётными или оба нечётными. Обозначим искомые числа a, b, c, d, где a кратно 10, b чётно и не кратно 5, c нечётно и кратно 5, d нечётно и не кратно 5. По условию $a + b = 2(c + d)$, $a + c = 5(b + d)$. Домножим второе равенство на 2 и сложим с первым, тогда $3a = 9b + 12d$ или $a = 3b + 4d$. Так как a кратно 10 и $b, d \geqslant 10$, то $a = 80$ или $a = 90$.

Если $a = 90$, то d кратно 3, тогда $d \geqslant 21$, тогда $a \geqslant 110$.

Если $a = 80$, то равенство $a = 3b + 4d$ достигается только при $b = 12$ и $d = 11$, так как $b \geqslant 12$ и $d \geqslant 11$. Тогда $c = 35$.

7. Числовой треугольник строится по следующим правилам. В первой строке написано число 1. В каждой следующей строке на два числа больше, чем в предыдущей, и каждое из них равно сумме трёх чисел из предыдущей строки: стоящего над ним и двух соседних (если каких-то из этих чисел нет в строке, то считается, что они равны 0). Несколько первых строк треугольника показаны на рисунке. Докажите, что в каждой строке, начиная с третьей, будет хотя бы одно чётное число.



Решение. Заметим, что чётность первых четырёх чисел в каждой строке зависит только от чётности первых четырёх чисел в предыдущей строке. Посмотрим на чётность первых четырёх чисел в каждой строке. В третьей строке это **нчнч**. Нетрудно понять, что в следующих строках будет **ннчн**, **нччч**, **нннч**, **нчнч**. Получили, что последовательность чётностей первых четырёх чисел зациклилась и в любой четвёрке последовательности есть чётное число. Следовательно, в каждой строке, начиная с третьей, будет хотя бы одно чётное число.

8. В треугольнике ABC отметили точку D — середину AB, и точку E, делящую сторону BC в отношении $2 : 1$, считая от точки B. Оказалось, что $\angle BAE = \angle CDA$. Найдите угол BAC.

Ответ. 90°. **Решение.** Обозначим через T середину отрезка BE. Тогда DT — средняя линия треугольника ABE. Следовательно, $DT \parallel AE$. Пусть P — точка пересечения отрезков AE и CD. Так как E — середина CT и $PE \parallel DT$, то PE — средняя линия треугольника CDT. Следовательно, $CP = PD$. По условию треугольник APD равнобедренный, а значит, $PD = PA$. Отсюда получаем, что в треугольнике ACD медиана AP равна половине стороны CD. Следовательно, $\angle BAC = 90^\circ$.