V Европейский математический турнир
г. Ярославль, 14–19 марта 2022 года

Командная олимпиада. 6 класс. Решения
15 марта

1. Расстояние между портами A и B равно 268 км. Из порта A в 00:55 вышел пароход в порт B. В 03:15 из порта B вышел второй пароход, который проходил в час на 6 км больше, чем первый. Пароходы встретились в то же утро в 07:35. Оба парохода движутся с постоянными скоростями. Найдите скорость первого парохода.

Ответ. 22 км/ч. **Решение.** До встречи второй пароход шёл 4 ч 20 мин. Если бы он шёл со скоростью первого, то прошёл бы на (6км/ч) $\cdot$ (4 ч 20 мин) $=$ 26 км меньше. Давайте приблизим его на 26 км и пустим со скоростью первого, тогда точка встречи не изменится. До встречи первый шёл 6 ч 40 мин. Продолжая идти с той же скоростью ещё 4 ч 20 мин, первый теплоход дойдёт до новой точки старта второго. Итого за 4 ч 20 мин $+$6 ч 40 мин $=$ 11 ч первый пройдёт $268 - 26 = 242$ км. Значит, его скорость $242 : 11 = 22$ км/ч.

2. Можно ли разрезать какой-нибудь кусок сыра на 8 частей так, чтобы можно было выбрать из них как 5 кусков общим весом $1/5$ от всего сыра, так и 6 кусков общим весом $1/6$ от всего сыра?

Ответ. Можно. **Решение.** Пусть в исходном куске 150 г. Разобьем на куски весами 5, 5, 5, 5, 10, 2, 3, 115 г. Тогда $1/5 = 30$ г $= 5+5+5+5+10$, а $1/6 = 25$ г $= 5+5+5+5+2+3$.

3. Переставляя буквы в слове ЯРОСЛАВЛЬ, получили всевозможные 9-буквенные слова, даже бессмысленные. Какое наибольшее число из полученных слов можно выбрать так, чтобы в любой позиции все выбранные слова имели различные буквы?

Ответ. 4 слова. **Решение.** *Оценка.* В слове ЯРОСЛАВЛЬ две буквы Л. Если выписать пять слов, то две из десяти 10-ти букв Л будут стоять одной позиции. *Пример.* Возьмем слово ЯРОСЛАВЬЛ и 3 ее циклических сдвига: ЯРОСЛАВЬЛ, РОСЛАВЬЛЯ, ОСЛАВЬЛЯР, СЛАВЬЛЯРО.

4. Время в спальной капсуле аэропорта покупается с помощью карточек восьми видов: они дают право спать 1 час, 2 часа, 3 часа, 4 часа, 6 часов, 8 часов, полсуток и сутки. Пассажир купил M карточек и спал N часов. Докажите, что можно купить N карточек и залечь ровно на M суток.

Решение. Обозначим число купленных пассажиром карточек соответственно a, b, c, d, e, f, g, h. Тогда $a+b+c+d+e+f+g+h = M$, $a+2b+3c+4d+6e+8f+12g+24h = N$. Купим теперь a суточных карточек, $2b$ полусуточных, $3c$ 8-часовых, $4d$ 6-часовых, $6e$ 4-часовых, $8f$ 3-часовых, $12g$ 2-часовых, $24h$ часовых. Тогда в сумме мы купили $a+2b+3c+4d+6e+8f+12g+$ $+24h = N$ карточек. Посчитаем общее время: $24a+12\cdot 2b+8\cdot 3c+6\cdot 4d+4\cdot 6e+3\cdot 8f+2\cdot 12g+$ $+1\cdot 24h = 24(a+b+c+d+e+f+g+h) = 24M$ часов $= M$ суток.

5. В каждую клетку доски 8×8 записали по натуральному числу. Оказалось, что в каждой строке (столбце или строке) стоит не более двух различных чисел. Какое наибольшее количество различных чисел может быть в этой таблице всего?

Ответ. 9 чисел. **Решение.** *Оценка.* Рассмотрим строку L, в которое есть два разных числа a и b. Если найдется другая строка M с двумя отличными от a и b числами c и d, то тогда в таблице будет всего 4 различных числа (так как в каждом столбце будет стоять по одному числу из пары (a, b) и (c, d)). Если такой строки M не найдется, то тогда каждая другая строка (их еще 7 штук) добавляет не более одного числа, отличного от a и b. Всего будет не более 2+7=9 различных чисел.

Пример. Поставим вдоль главной диагонали числа от 1 до 8. В остальные клетки поставим число 8.

6. Дан полный граф с 2022 вершинами. Двое игроков делают ходы по очереди. Первый игрок за свой ход может стереть любой набор ребер, выходящих из одной вершины. Второй игрок может нарисовать любое ребро или любые два ребра. Может ли второй игрок действовать так, что после любого его хода граф будет связным?

Ответ. Да, может. **Решение.** Выделим цикл, проходящий по каждой вершине ровно по одному разу. За один ход первый игрок удаляет ровно два смежных ребра в этом цикле. Пусть тогда второй игрок возвращает эти два удаленных ребра. При таких действиях после каждого хода второго игрока все ребра выбранного цикла будут присутствовать. Поэтому граф будет оставаться связным.

7. Числовой треугольник строится по следующим правилам. В первой строке написано число 1. В каждой следующей строке на два числа больше, чем в предыдущей, и каждое из них равно сумме трёх чисел из предыдущей строки: стоящего над ним и двух соседних (если каких-то из этих чисел нет в строке, то считается, что они равны 0). Несколько первых строк треугольника показаны на рисунке. Докажите, что в каждой строке, начиная с третьей, будет хотя бы одно чётное число.

Решение. Заметим, что чётность первых четырёх чисел в каждой строке зависит только от чётности первых четырёх чисел в предыдущей строке. Посмотрим на чётность первых четырёх чисел в каждой строке. В третьей строке это **нчнч**. Нетрудно понять, что в следующих строках будет **ннчн**, **нччч**, **нннч**, **нчнч**. Получили, что последовательность чётностей первых четырёх чисел зациклилась, и в любой четвёрке последовательности есть чётное число. Следовательно, в каждой строке, начиная с третьей, будет хотя бы одно чётное число.

8. Имеется четыре различных двузначных числа. Сумма двух кратных пяти в 5 раз больше суммы двух не кратных пяти. Сумма двух чётных в 2 раза больше суммы двух нечётных. Найдите эти числа.

Ответ. 11, 12, 35 и 80. **Решение.** Ясно, что числа, кратные 5, не могут быть оба чётными или оба нечётными. Обозначим искомые числа a, b, c, d, где a кратно 10, b чётно и не кратно 5, c нечётно и кратно 5, d нечётно и не кратно 5. По условию $a + b = 2(c + d)$, $a+c = 5(b+d)$. Домножим второе равенство на 2 и сложим с первым, тогда $3a = 9b+12d$, или $a = 3b + 4d$. Так как a кратно 10 и $b, d \geqslant 10$, то $a = 80$ или $a = 90$.

Если $a = 90$, то d кратно 3, тогда $d \geqslant 21$, тогда $a \geqslant 110$.

Если $a = 80$, то равенство $a = 3b + 4d$ достигается только при $b = 12$ и $d = 11$, так как $b \geqslant 12$ и $d \geqslant 11$. Тогда $c = 35$.