

V Европейский математический турнир
г. Ярославль, 14–19 марта 2022 года



Командная олимпиада. 5 класс. Решения
15 марта

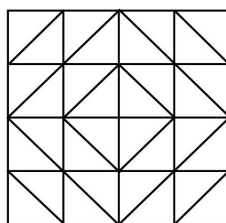
1. *Палиндром* — это слово (возможно, бессмысленное), которое одинаково читается слева направо и справа налево, например ПОТОП или РСФСР. Петя разрезал на буквы слово ЕВРОПЕЙСКИЙ. Сколько различных 5-буквенных палиндромов он мог бы составить?

Ответ. 14. Решение. В палиндроме первая буква совпадает с 5-й, а 2-я — с 4-й. Есть только две пары совпадающих букв: ЕЕ и ЙЙ. Принципиально возможны 2 вида палиндромов: ЕЙхЙЕ и ЙЕхЕЙ. Вместо х можно подставить любую из 7 оставшихся букв.

2. К левому берегу реки подошли две семьи: папа с тремя сыновьями 7, 8 и 9 лет, и папа с тремя сыновьями 10, 11 и 12 лет. Есть двухместная лодка. Грести могут только папы, а дети согласны ехать только со своим папой. Если на берегу останутся дети с разницей ровно 1 год, каждый без своего папы, они подерутся. Как всем переправиться на правый берег без драк?

Решение. Папу младших детей обозначим М, папу старших — С, детей — числом (возрастом). Обозначим $\rightarrow$ рейс на правый берег, а через $\leftarrow$ рейс обратно. $M8 \rightarrow \quad M \leftarrow \quad M7 \rightarrow$
 $M8 \leftarrow \quad M9 \rightarrow \quad M \leftarrow \quad C11 \rightarrow \quad C \leftarrow \quad MС \rightarrow \quad M \leftarrow \quad M8 \rightarrow \quad C \leftarrow \quad C12 \rightarrow \quad C11 \leftarrow$
 $C10 \rightarrow \quad C \leftarrow \quad C11 \rightarrow$ (получилось 17 поездок).

3. Клетки доски 4×4 разбиты диагоналями на треугольники (см. рис.). За один ход надо покрасить один такой треугольник: Пете — в красный, Васе — в синий цвет. Игра заканчивается, когда всё покрашено. Если найдётся составленный из треугольников красный квадрат, выигрывает Петя, иначе — Вася. Кто из них может выиграть, как бы ни играл соперник?



Ответ. Петя. Решение. Петя по очереди красит треугольники с вершиной в центре доски. Если на какой-то из его ходов Вася в ответ не закрасит второй треугольник в той же клетке, его закрасит Петя и выиграет. Иначе Петя за 4 хода закрасит 4 центральных треугольника, они образуют повёрнутый красный квадрат.

4. Можно ли разрезать какой-нибудь кусок сыра на 8 частей так, чтобы можно было выбрать из них как 5 кусков общим весом $1/5$ от всего сыра, так и 6 кусков общим весом $1/6$ от всего сыра?

Ответ. Можно. Решение. Пусть в исходном куске 150 г. Разобьём на куски весами 5, 5, 5, 5, 10, 2, 3, 115 г. Тогда $1/5 = 30 \text{ г} = 5 + 5 + 5 + 5 + 10$, а $1/6 = 25 \text{ г} = 5 + 5 + 5 + 5 + 2 + 3$.

5. Расстояние между портами A и B равно 268 км. Из порта A в 00:55 вышел пароход в порт B . В 03:15 из порта B вышел второй пароход, который проходил в час на 6 км больше, чем первый. Пароходы встретились в то же утро в 07:35. Оба парохода движутся с постоянными скоростями. Найдите скорость первого парохода.

Ответ. 22 км/ч. **Решение.** До встречи второй пароход шёл 4 ч 20 мин. Если бы он шёл со скоростью первого, то прошёл бы на $(6 \text{ км/ч}) \cdot (4 \text{ ч } 20 \text{ мин}) = 26 \text{ км}$ меньше. Давайте приближим его на 26 км и пустим со скоростью первого, тогда точка встречи не изменится. До встречи первый шёл 6 ч 40 мин. Продолжая идти с той же скоростью ещё 4 ч 20 мин, первый теплоход дойдёт до новой точки старта второго. Итого за 4 ч 20 мин + 6 ч 40 мин = 11 ч первый пройдёт $268 - 26 = 242 \text{ км}$. Значит, его скорость $242 : 11 = 22 \text{ км/ч}$.

6. По кругу встали 10 жителей острова рыцарей и лжецов (есть те и другие). Один из них сказал: “Мой правый сосед — рыцарь”. Другой (не обязательно стоящий рядом) сказал: “Двое моих соседей справа — рыцари”. Третий сказал: “Трое моих соседей справа — рыцари”, и т.д. до “9 моих соседей справа — рыцари”. Наконец, последний сказал: “А мой сосед справа — лжец”. Сколько всего жителей могли бы в принципе сказать последнюю фразу?

Ответ. 2. **Решение.** Есть одна или несколько групп рыцарей подряд. Заметим, что последний справа рыцарь в такой группе мог сказать только “А мой сосед справа — лжец”. Так как это было сказано всего раз, то и группа рыцарей одна. Все остальные в ней не могут сказать “А мой сосед справа — лжец”. Ещё её мог бы сказать лжец, у которого справа стоит рыцарь. Но такой лжец только один, он стоит перед первым в группе рыцарей.

7. Имеет ли решение ребус $\text{ТУРН} + \text{ИР} = \text{ЕВРО} + \text{ПЫ}$?

Ответ. Не имеет. **Решение.** Вычтем из обеих частей $10 \cdot \text{Р}$, получим равенство

$$\text{ТУ00} + \text{Н} + \text{ИР} = \text{ЕВ00} + \text{О} + \text{ПЫ}.$$

Так как $\text{Т} \neq \text{Е}$, в одной из частей произошёл переход через тысячи, а в другой части — не произошёл. Значит, У и В равны 0 и 9 в каком-то порядке.

Если $\text{У} = 9$, то $\text{Н} + \text{ИР}$ должно быть больше 99, но $\text{И} \neq \text{У} = 9$, поэтому такой случай невозможен.

Если $\text{В} = 9$, то $\text{О} + \text{ПЫ}$ должно быть больше 99, но $\text{П} \neq \text{В} = 9$, поэтому такой случай также невозможен.

8. Клетки квадрата 9×9 покрашены в шахматном порядке. Прямоугольник из целых клеток назовём *хорошим*, если чёрных и белых клеток в нём не поровну. На какое наибольшее число хороших прямоугольников различной площади можно разрезать этот квадрат?

Ответ. На 7. **Решение.** *Оценка.* Заметим, что в любом прямоугольнике число чёрных и белых клеток отличается не больше, чем на 1. Значит, в хорошем прямоугольнике это число отличается ровно на 1, и общее число клеток нечётно. С другой стороны, любой прямоугольник нечётной площади, очевидно, хороший. Так как в квадрате число клеток нечётно, то он может быть разрезан только на нечётное число частей нечётной площади. Наименьшие 9 возможных площадей прямоугольников, помещающихся в квадрат: 1, 3, 5, 7, 9, $15 = 3 \times 5$, $21 = 3 \times 7$, $25 = 5 \times 5$, $35 = 5 \times 7$. Даже если взять эти 9 наименьших, сумма площадей частей будет $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 15 + 21 + 25 + 35 = 111 > 9 \times 9$. Значит, частей не более 7.

Пример. Разрежем сначала квадрат на прямоугольник 7×9 и две полосы 1×9 . Прямоугольник 7×9 режем на 7×5 , 7×3 и 7×1 . Одну из полос режем на части площади 1, 3 и 5.