IV Европейский математический турнир
г. Тверь, 15–20 марта 2021 года

Тур 4. Сеньоры. Гранд-лига. Бои нижние

20 марта

1. Некоторые клетки квадрата 100×100 покрашены в один из n цветов так, чтобы покрашенные клетки не имели общих точек. При каком наименьшем n данную раскраску можно гарантированно дополнить до правильной? Раскраска называется правильной, если каждая покрашена в один из данных n цветов и соседние по стороне клетки покрашены в разные цвета.

2. Гриша сделал 8 одинаковых игральных кубиков, грани которых пронумерованы тоже одинаково от 1 до 6. Из них он сложил куб $2\times2\times2$ так, чтобы на каждой паре прилегающих граней двух кубиков сумма была простым числом. Какова наименьшая возможная сумма чисел на поверхности куба?

3. На столе лежат гирьки веса $1, 2, \ldots, 100$ г. Петя делит их на пары, а затем Вася раскладывает их все на чашечные весы так, чтобы гирьки из одной пары всегда попадали на разные чаши. Вася хочет, чтобы разность весов на чашах стала как можно меньше, а Петя — как можно больше. Найдите разность при наилучшей игре сторон.

4. Назовём натуральное число $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ (здесь p_i — различные простые числа) *несложным*, если сумма $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k < 11$. Существует ли 2021 подряд идущих чисел, среди которых ровно 1729 несложных?

5. В треугольник вписан квадрат так, что на одной стороне треугольника оказались две вершины квадрата, на двух других — по одной. Оказалось, что центр квадрата и точка пересечения медиан треугольника совпали. Найдите углы треугольника.

6. На прямой провод уселись 38 попугаев. Каждый верно сосчитал и назвал вслух сумму расстояний от него до остальных попугаев (в метрах). Могли ли быть названы в некотором порядке 38 последовательных натуральных чисел?

7. У учителя было 2^k яблок и два школьника. Одно яблоко он съел, а все остальные раздал школьникам. Школьники не видят, сколько яблок получил их товарищ и не знают, сколько яблок было изначально. Цель школьников — узнать, кому досталось больше яблок. Для этого они заранее договариваются о системе оповещения: моргнуть правым глазом или моргнуть левым глазом. Знаки они подают одновременно и только один раз, и после этого каждый должен верно сказать, у кого яблок больше. Могут ли школьники добиться желаемого?

8. Дан треугольник, для сторон a, b и c которого выполняется равенство

$$\frac{c^2 - a^2}{b} + \frac{b^2 - c^2}{a} = b - a.$$

Докажите, что длины его биссектрис также можно подставить в это равенство вместо a, b и c так, чтобы оно осталось верным.