IV Европейский математический турнир
г. Тверь, 15–20 марта 2021 года

Тур 4. Сеньоры. Гранд-лига. Бои верхние

20 марта

1. Некоторые клетки квадрата 100×100 покрашены в один из n цветов так, чтобы покрашенные клетки не имели общих точек. При каком наименьшем n данную раскраску можно гарантированно дополнить до правильной? Раскраска называется правильной, если каждая покрашена в один из данных n цветов и соседние по стороне клетки покрашены в разные цвета.

2. На столе лежат гирьки веса $1, 2, \ldots, 100$ г. Петя делит их на пары, а затем Вася раскладывает их все на чашечные весы так, чтобы гирьки из одной пары всегда попадали на разные чаши. Вася хочет, чтобы разность весов на чашах стала как можно меньше, а Петя — как можно больше. Найдите разность при наилучшей игре сторон.

3. Числа $a, b, c \geqslant 3$. Докажите, что $3(abc + b + 2c) \geqslant 2(ab + 2ac + 3bc)$.

4. Назовём натуральное число $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ (здесь p_i — различные простые числа) *несложным*, если сумма $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k < 11$. Существует ли 2021 подряд идущих чисел, среди которых ровно 1729 несложных?

5. В квадрате $ABCD$ точка M — середина BC. Точка L на стороне CD такова, что AM биссектриса $\angle BAL$. Точка S на AD такова, что $\angle LMS = 45^\circ$. Докажите, что отрезок MS делится отрезком AL пополам.

6. Найдите все натуральные n, для которых существует простое p такое, что $p^n - (p-1)^n$ является степенью числа 3.

7. Дана последовательность натуральных чисел $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Известно, что сумма любых двух соседних членов равна удвоенному квадрату. Найдите наименьшее возможное значение a_n.

8. У учителя было 2^k яблок и два школьника. Одно яблоко он съел, а все остальные раздал школьникам. Школьники не видят, сколько яблок получил их товарищ и не знают, сколько яблок было изначально. Цель школьников — узнать, кому досталось больше яблок. Для этого они заранее договариваются о системе оповещения: моргнуть правым глазом или моргнуть левым глазом. Знаки они подают одновременно и только один раз, и после этого каждый должен верно сказать, у кого яблок больше. Могут ли школьники добиться желаемого?