IV Европейский математический турнир
г. Тверь, 15–20 марта 2021 года

Тур 3. Сеньоры. Гранд-лига.

19 марта

1. На доску выписали все неоднозначные делители числа 50! от 10 до 50! включительно. Раз в минуту Серёжа находит на доске два числа a и b, где a делится на b, старые числа стирает, а вместо них пишет частное a/b. В конце осталось одно двузначное число. Найдите, чему оно может быть равно.

2. Коля задумал трехзначное число, в записи которого нет цифр 0 и 9. Толя пытается угадать задуманное число. Каждым ходом он называет какое-либо трёхзначное число. Если названное число совпадает с задуманным хотя бы в двух разрядах, то Коля говорит: "И так сойдёт," и процесс заканчивается. Как Толе закончить процесс за 32 шага?

3. Петя и Вася играют на доске 20×20. Изначально в некоторой клетке этой доски стоит фишка. Ребята по очереди, начиная с Пети, двигают эту фишку на соседнюю по стороне клетку. Нельзя перемещать фишку через одну и ту же границу дважды. Проигрывает тот, кто не может сходить. При каких начальных положениях фишки побеждает Петя?

4. В треугольнике ABC $\angle A = 2\angle C$. На стороне AB выбрана точка M такая, что $AM = AC$. Оказалось, что $CM = AB$. Найдите углы треугольника ABC.

5. В графе на n вершинах наибольшее количество вершин в полном подграфе равно k. Докажите, что в графе можно выделить не более $3^{(n+k)/3}$ полных подграфов.

6. Перед Аней и Борей лежат 20 монет веса $1, 2, 3, \ldots, 14, 15, 37, 38, 39, 40, 41$ граммов. Монеты выглядят по-разному, но определить на вид, какая весит больше, невозможно. Оба знают, сколько должны весить монеты, но только Аня знает про каждую монету её вес (а Боря не знает вес никакой конкретной монеты). За какое наименьшее количество взвешиваний на чашечных весах без гирь Аня сможет доказать Боре про монету массой 1 грамм, что она действительно столько весит?

7. Найдите все $n > 3$, обладающие следующим свойством: для каждого делителя d числа n^2, где $d > 15$, число $d + 15$ является степенью простого числа (возможно, первой).

8. Дано натуральное число n. Числа $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ — положительные вещественные с условием $x_1 + \ldots + x_n = y_1 + \ldots + y_n = 1$. Докажите, что

$$|x_1 - y_1| + \ldots + |x_n - y_n| \leqslant 2 - \min_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{x_i}{y_i} - \min_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{y_i}{x_i}.$$