

IV Европейский математический турнир
г. Тверь, 15–20 марта 2021 года



Тур 2. Сеньоры. Первая лига.
18 марта

1. Куском ткани в виде многоугольника обернули без наложений и щелей кубическую посылку со стороной 1 дм. Там, где края ткани соприкоснулись, сделали шов. Оказалось, что все узлы (точки, откуда шов идёт более чем в двух направлениях) пришлись на вершины куба. Найдите наименьший возможный периметр многоугольника.

2. По кругу лежат 2022 пустых карточки. Петя и Вася по очереди вписывают в карточки цифры, начинает Петя. На очередном ходу можно вписать число в любую пустую карточку. После того, как все карточки заполнены, Петя нумерует карточки по часовой стрелке, начиная с любой карточки, с которой захочет. Затем мальчики считают сумму $S = \overline{a_1 a_2 a_3} + \overline{a_4 a_5 a_6} + \dots + \overline{a_{2020} a_{2021} a_{2022}}$. Если $S : 999$, то побеждает Вася. Иначе побеждает Петя. Кто выигрывает при правильной игре?

3. К левому берегу реки подошли 20 белых магов, один силы 2, каждый из остальных силы 1, и точно такая же по силам группа из 20 чёрных магов. Белые маги не согласны быть в лодке или на берегу вместе с чёрными, если там сумма сил чёрных больше чем у белых. Как им всем с помощью трехместной лодки переправиться на правый берег?

4. Костя представил простое число p как сумму четырех натуральных слагаемых: $p = a + b + c + d$ и выписал на доску шесть попарных сумм $a + b, a + c, a + d, b + c, b + d, c + d$. Известно, что одно из чисел на доске делится на 2, другое — на 3, третье — на 4, четвертое — на 10. Может ли ещё одно из выписанных чисел делиться на 100?

5. Сколькими способами из клетчатого квадрата 6×6 можно вырезать шестиугольник с границами по сторонам клеток? Равные фигуры в разных местах считаются разными способами.

6. По дороге без остановок с постоянной скоростью едет машина с неограниченным запасом топлива. Через каждые 15 километров стоят светофоры, которые горят красным светом только последние 6 минут каждого часа, а остальное время зелёным. Оказалось, что машина проехала без остановок 10 часов, то есть на каждом светофоре машина проезжала на зелёный свет. Какое наибольшее количество километров могла проехать машина за это время?

7. В квадрате $ABCD$ из вершины A проведены два луча, делящие угол на три равные части. Один луч пересекает диагональ BD в точке N , второй пересекает продолжение BC в точке M . Через точку B провели прямую, перпендикулярную BD и пересекающую прямую MN в точке K . Найдите $\angle KAC$.

8. В компании из 51 человека каждый — рыцарь или лжец. Когда у всех спросили, со сколькими лжецами среди присутствующих вы знакомы, все ответы оказались различны. Какое наибольшее количество рыцарей может быть в этой компании?