

IV Европейский математический турнир
г. Тверь, 15–20 марта 2021 года



Тур 2. Сеньоры. Гранд-лига.
18 марта

1. Будем называться делитель d числа n *близким*, если $\sqrt{n} < d < 2\sqrt{n}$. Существует ли натуральное число n , у которого есть ровно 2021 близких делителей?

2. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_{2021}$ — последовательность натуральных чисел, для которой выполнено

$$a_{n+5} + a_n > a_{n+2} + a_{n+3}$$

для всех $n = 1, 2, \dots, 2016$. Докажите, что разность между какими-то членами последовательности больше 85 000.

3. Куском ткани в виде многоугольника обернули без наложений и щелей кубическую посылку со стороной 1 дм. Там, где края ткани соприкоснулись, сделали шов. Оказалось, что все узлы (точки, откуда шов идёт более чем в двух направлениях) пришлись на вершины куба. Найдите наименьший возможный периметр многоугольника.

4. К левому берегу реки подошли 6 белых и 6 чёрных магов. Каждый маг имеет силу больше 0, все 12 сил различны, суммы сил белых и черных магов равны. Белые маги не согласны быть в лодке или на берегу вместе с чёрными, если там сумма сил чёрных больше чем у белых. Могло ли распределение сил позволить им всем с помощью трехместной лодки переправиться на правый берег?

5. Докажите, что положительное число a рационально тогда и только тогда, когда среди чисел $a, a + 1, \dots, a + n, \dots$, найдутся 4 числа, которые можно разбить на две пары с одинаковым произведением.

6. Сапсан и Ласточка курсируют по железной дороге между Москвой и Тверью. Каждый из поездов едет с постоянной скоростью, причем скорость Сапсана на четверть выше скорости Ласточки. Приехав в какой-то из этих городов, каждый поезд стоит ровно 15 минут, а затем едет обратно. В 8:00 Сапсан вышел из Москвы, а Ласточка — из Твери. В 13:00 впервые они оба оказались одновременно в Твери. Сколько времени тратит Сапсан на то, чтобы проехать из одного города в другой?

7. Дана трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$). На сторонах AB и AD выбраны точки E и K соответственно. Известно, что CK перпендикулярно AD , $\angle DCE = \angle ABC$ и $AB + 2AK = AD + BC$. Докажите, что $BE = BC$.

8. На окружности отмечены 2021 точки, раскрашенные в k цветов. Известно, что для каждой отмеченной точки P и для каждого цвета s существует дуга окружности, содержащая данную точку P , в которой не менее половины точек раскрашены в цвет s . Найдите наибольшее возможное значение k .