

IV Европейский математический турнир
г. Тверь, 15–20 марта 2021 года



Тур 1. Сеньоры. Первая лига.
17 марта

1. Вася сложил из доминошек прямоугольник 21×100 и раскрасил его диагонально в три цвета. В результате каждая доминошка раскрасилась в два цвета. Докажите, что из этих доминошек Вася может составить прямоугольник 35×60 , диагонально раскрашенный в три цвета. (Диагональная трёхцветная раскраска означает, что каждая диагональ одного из направлений одноцветна, и если она не одноклеточная, то граничит с двумя диагоналями двух других цветов).

2. Выписаны числа $1, 2, 3, \dots, 2021$. Можно ли из них выбрать такое число N , чтобы среди остальных у него было ровно 10 делителей и ровно 10 кратных (само число мы ни там, ни тут не считаем)?

3. Натуральные числа a, b и c таковы, что $a^2 + b^2$ делится на c^2 , $a^2 + c^2$ делится на b^2 и $b^2 + c^2$ делится на a^2 . Верно ли, что все числа равны?

4. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Его стороны AB и CD продлили за точки B и D на свои длины, получив точки P и R . Стороны BC и DA продлили за точки C и A на удвоенные длины, получив точки Q и S . Прямые PQ и RS пересекают прямую AC в точках X и Y . Найдите отношение $XY : AC$.

5. По кругу расставлены натуральные числа от 1 до 100 в некотором порядке. Для каждой пары соседних чисел посчитали модуль их разности, а затем сложили все эти числа. Найдите наибольшее возможное значение этой суммы.

6. Компьютер напечатал на ленту числа $1, 2, 3, \dots, 999$ в некотором порядке подряд без пробелов, каждое по одному разу. Получилось строка из цифр. Какое наибольшее количество раз на этой ленте может быть напечатана одинаковая комбинация из трёх подряд идущих цифр?

7. Ковбои Ивэн и Одд выпустили в мишень по 20 пуль, каждый раз выбивая очки: Ивэн чётное, а Одд — нечётное число. Ивэн попал в десятку, восьмёрку, шестёрку, четвёрку и двойку столько раз, сколько Одд в семёрку, пятёрку, тройку, единицу и девятку соответственно. В сумме они выбили поровну очков. Сколько девяток выбил Одд?

8. В ряд стоят 11 одинаковых шкатулок с одинаковыми монетами, в самой левой 11 монет, в каждой следующей на одну монету больше, чем в предыдущей. Шутник переложил из некоторой шкатулки III одну монету в шкатулку слева через одну. Как найти III за два взвешивания на чашечных весах без гирь?