IV Европейский математический турнир
г. Тверь, 15–20 марта 2021 года

Командная олимпиада. Лига сеньоров. Решения

16 марта

1. Петя, Вася и Толя поехали на велосипедах с дачи на озеро. Каждый из них едет со своей постоянной скоростью, стартуют они одновременно. Когда Петя проехал треть расстояния, Вася проехал только четверть расстояния. Когда Вася проехал треть расстояния, Толе оставалось проехать четверть расстояния. Какую часть расстояния проехал Петя в тот момент, когда Толя проехал треть расстояния?

Ответ. $\frac{16}{81}$. **Решение.** Из первого условия следует, что отношение скоростей Пети и Васи равно $\frac{4}{3}$. Из второго условия следует, что отношение скоростей Васи и Толи равно $\frac{1}{3} : \frac{3}{4} = \frac{4}{9}$. Следовательно, отношение скоростей Пети и Толи равно $\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{16}{27}$. Поэтому когда Толя проехал треть расстояния, Петя проехал $\frac{1}{3} \cdot \frac{16}{27} = \frac{16}{81}$ часть того же расстояния.

2. Числа a, b, c (не обязательно целые) таковы, что $3a+4b = 4c$ и $4a-3b = 3c$. Докажите, что $a^2 + b^2 = c^2$.

Решение. Возведём оба равенства из условия в квадрат и сложим полученные равенства: $(3a+4b)^2+(4a-3b)^2 = (4c)^2+(3c)^2$. Раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые, получим $25a^2 + 25b^2 = 25c^2$, что равносильно доказываемому равенству.

3. На клетчатой бумаге со стороной клетки, равной 1, обведены несколько клетчатых фигур. Для каждой фигуры посчитаны её площадь и периметр. Все получившиеся числа оказались различны. Может ли так случиться, что, выписав их по возрастанию, мы получим ряд последовательных чисел, начиная с 1?

Ответ. Нет. **Решение.** В нужном ряду нечётных чисел столько же, сколько и чётных. Периметр всегда чётен, поэтому чётных чисел не меньше, чем фигур. Но периметр 2 невозможен, поэтому есть фигура с площадью 2. Значит, чётных чисел как минимум на одно больше, чем фигур, а нечётных — как минимум на одно меньше. Поэтому количество чётных и нечётных чисел отличается как минимум на 2.

4. На доске выписаны $n > 1$ различных натуральных чисел. Оказалось, что для любых различных чисел на доске a, b верно, что $(a+1)^2 \vdots b$. Чему может быть равно n?

Ответ. $n = 2$. **Решение.** Для начала приведём пример на 2 числа: 1, 2. Докажем, что при $n \geqslant 3$ это невозможно. Рассмотрим любые три написанных числа $a < b < c$. По условию $(b+1)^2 \vdots c$, поэтому НОД$(b, c) = 1$. А это значит, что раз $(a+1)^2 \vdots b$ и $(a+1)^2 \vdots c$, то $(a+1)^2 \vdots bc$. Но $(a+1)^2 < b \cdot c$, противоречие. Следовательно, $n \leqslant 2$.

5. На стороне CD трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) отмечена точка P. Оказалось, что AP и BP — биссектрисы углов A и B соответственно. Пусть $BC = m$, а $AD = n$. Найдите AB.

Ответ. $m + n$. **Решение.** Для начала заметим, что P лежит на пересечении биссектрис углов A и B, а значит, расстояния от точки P до прямых BC, AB и AD равны. Следовательно, P находится на средней линии трапеции $ABCD$, поэтому P — середина CD. Пусть продолжение BP пересекает прямую AD в точке Q. Тогда P — середина BQ, а треугольники BCP и QDP равны, значит, $DQ = BC$. Из параллельности следует, что $\angle PBC = \angle PQD$, поэтому треугольник ABQ равнобедренный. Тогда $AB = AQ = AD + DQ = AD + BC = m + n$.

6. Петя и Вася играют на доске 9×9. В каждой клетке доски находится несколько фишек. В первой строке количество фишек (слева направо) равно 1^2, 2^2, …, 9^2, во второй строке — 10^2, 11^2, …, 18^2 слева направо и т. д, в последней строке — 73^2, 74^2, …, 81^2. За один ход каждый мальчик выбирает клетчатый прямоугольник, одна из сторон которого равна 1, в каждой клетке которого стоит хотя бы одна фишка, и берёт из каждой клетки этого прямоугольника по одной фишке. Игроки ходят по-очереди, начинает Петя. Игра заканчивается, когда разобраны все фишки. Побеждает тот мальчик, кто забрал себе больше фишек. Кто побеждает при правильной игре? Напомним, что квадрат 1×1 также является прямоугольником.

Ответ. Выигрывает Петя. **Решение.** Стратегия за Петю незамысловатая: пусть он берёт на каждом своём шагу максимальное возможное количество фишек. Тогда следующим ходом Вася возьмёт не больше фишек, чем Петя. А значит, суммарно за всю игру Петя возьмёт фишек не меньше, чем Вася. Осталось заметить, что фишек нечётное количество, так как среди чисел 1^2, 2^2, …, 81^2 ровно 41 число нечётное. Следовательно, Петя победит.

7. Дано число $0 < u < 1$. Определим последовательность:

$$u_1 = 1 + u, u_2 = \frac{1}{u_1} + u, u_3 = \frac{1}{u_2} + u, \ldots, u_n = \frac{1}{u_{n-1}} + u.$$

Докажите, что $u_n > 1$.

Решение. Докажем индукцией по n, что $1 < u_n < \frac{1}{1-u}$. *База.* $u_1 = 1+u$. Действительно, $1 + u > 1$ и $1 + u < \frac{1}{1-u}$, так как $1 - u^2 < 1$. *Шаг индукции.* Пусть $1 < u_n < \frac{1}{1-u}$. Тогда $u_{n+1} = \frac{1}{u_n} + u > \frac{1}{\frac{1}{1-u}} + u = 1$ и $u_{n+1} = \frac{1}{u_n} + u < 1 + u < \frac{1}{1-u}$. Переход индукции доказан. Осталось заметить, что доказанное утверждение даёт решение задачи.

8. $2n+1$ волейбольных команд разыграли турнир в один круг, причём каждая команда одержала ровно n побед. Сколько в этом турнире может быть троек команд, которые во встречах между собой имеют по одной победе? Как известно, в волейболе ничьих не бывает.

Ответ. $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. **Решение.** Рассмотрим ориентированный граф, в котором вершины — это команды, а рёбра идут от выигравших команд к проигравшим. Всего треугольников в графе $C_{2n+1}^3 = \frac{(2n+1)2n(2n-1)}{6}$. Рассмотрим треугольники, в которых не верно, что все команды выиграли по одному разу. В каждом таком треугольнике есть ровно одна команда, которая выиграла у двух команд, а значит, каждый такой треугольник содержит "галку". Посчитаем количество галок. Из каждой вершины выходит C_n^2 галок, поэтому их общее количество равно $\frac{(2n+1)n(n-1)}{2}$. Тогда треугольников, про которые говорится в условии, будет $\frac{(2n+1)2n(2n-1)}{6} - \frac{(2n+1)n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.