IV Европейский математический турнир
г. Тверь, 15–20 марта 2021 года

Командная олимпиада. Лига юниоров. Решения
16 марта

1. Если палку разрезать на 3 равные части, длина части будет между 41 и 42 см. Если палку разрезать на 4 равные части, длина части будет между 31 и 32 см. Между какими соседними целыми сантиметрами будет длина части, если палку разрезать на 7 равных частей? Известно, что длины всех частей, о которых говорилось выше, не целые.

Ответ. Между 17 и 18 см. **Решение.** Складывая по три палочки длин 41 и 42 см, видим, что длина палки между 123 и 126 см. Аналогично длина палки между 124 и 128 см. Значит, она между 124 и 126 см. Деля на 7, получаем часть между $124/7$ и $126/7$ см, откуда ответ.

2. 33 богатыря за круглым столом соревновались, кто больше съест каши. Все съели разное количество. У какого наибольшего числа богатырей соседи справа и слева могли съесть вдвоём ровно пуд каши?

Ответ. У 16. **Решение.** *Оценка.* Назовем *двойкой* пару богатырей, сидящих через одного и съевших вместе пуд каши. Если бы богатырь вошёл в две двойки, то его напарники в этих двойках съели бы поровну, что противоречит условию. Значит, каждый богатырь входит не более чем в одну двойку, и число двоек не более $33/2$, то есть не более 16. *Пример.* Назовём одного богатыря Черномором, остальных разобьём на 8 четвёрок подряд сидящих, а каждую такую четвёрку — на две двойки. Итого у нас 16 двоек. Разобьём пуд на 40 равных фунтов. Пусть богатыри первой двойки съедят 1 и 39 фунтов, второй — 2 и 38, $\ldots$, 16-й — 16 и 24 фунта каши, а Черномор пусть съест пуд — не жалко.

3. Есть ли у ребуса МАТ + БОЙ = ИГРЫ такое решение, где число ИГРЫ — простое?

Ответ. Нет. **Решение.** В записи слов МАТ, БОЙ и ИГРЫ все 10 цифр использованы ровно по разу, поэтому общая сумма цифр равна 45, то есть делится на 9. Каждое из этих чисел даёт тот же остаток при делении на 9, что и сумма его цифр, значит, сумма чисел делится на 9. Но она равна $2 \cdot$ ИГРЫ, поэтому ИГРЫ кратно 9 и не может быть простым.

4. Клетчатый квадрат 8×8 разрезали по границам клеток на 4 клетчатые фигуры. Для каждой выписали площадь (в клетках) и периметр (длина стороны клетки равна 1). Получилось 8 различных чисел. Может ли быть, что при записи по возрастанию это окажутся 8 последовательных чисел?

Ответ. Да. *Указание.* Среди 8 последовательных чисел 4 числа нечётны. Периметр клетчатой фигуры всегда чётный, поэтому все площади нечётны. Они идут через два и их сумма 64, поэтому это могут быть только числа 13, 15, 17, 19. Периметр фигуры из 13 клеток не меньше 14, поэтому периметры равны 14, 16, 18, 20. По этим данным пример легко строится.

5. Настя и Ваня ходят по очереди, начинает Настя. Первым ходом Настя ставит фигуру Белогор на любую клетку шахматной доски, а Ваня делает им три хода как королем. Затем Настя делает Белогором один ход как конем или слоном, а Ваня опять три хода как королем, и т. д. Нельзя ставить Белогора на клетку, где он уже бывал. Кто не сможет сделать ход — проигрывает. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник?

Ответ. Ваня. **Решение.** Ваня разбивает доску на квадраты 2×2. Первым ходом Настя ставит Белогора в один из квадратов, и Ваня делает три хода по клеткам этого квадрата. Если Настя может сделать ход, то она опять поставит Белогора в ещё пустой квадрат, и опять Ваня в ответ обойдёт остальные три клетки квадрата, и т. д. Таким образом, Ваня никогда не проиграет, а значит, выиграет.

6. Костя разбил все целые числа от 1 до 20 на две группы и сосчитал средние арифметические в каждой из групп. Одно из них оказалось равным 14. Какое наименьшее значение может принять второе?

Средним арифметическим набора нескольких чисел называется их сумма, делённая на их количество.

Ответ. 4. **Решение.** *Пример.* Есть группа A из чисел от 8 до 20, её среднее арифметическое равно 14, и группа B из чисел от 1 до 7, её среднее арифметическое равно 4. *Оценка.* Пусть в группе A' среднее арифметическое равно 14. Если в ней $a > 13$ чисел, то заменим их на a наибольших чисел. Полученная группа включает в себя A и ещё несколько чисел меньше 8, поэтому её среднее арифметическое меньше 14. Но тогда и среднее арифметическое чисел группы A' меньше 14 — противоречие. Значит, $a \leqslant 13$, а во второй группе B' количество чисел $b \geqslant 7$. Даже если мы заменим их на b наименьших чисел, то полученная группа будет включать в себя B и, возможно, ещё какие-то числа не меньше 8, поэтому её среднее арифметическое не меньше 4.

7. Все гномы делятся на лжецов и рыцарей. На каждой клетке доски 21×21 стоит по гному. Каждый заявил: "Среди моих соседей лжецов и рыцарей поровну". Докажите, что на доске стоит нечётное число лжецов. (Два гнома считаются соседями, если они стоят в клетках, имеющих общую сторону.)

Решение. У крайней не угловой клетки 3 соседа, поэтому на ней стоит лжец. Тогда у угловой клетки на всех соседних стоят лжецы, поэтому и на ней стоит лжец. Рыцарь, если он есть, стоит на клетке с 4 соседями, и у него ровно два соседа-рыцаря. Но тогда клетки с рыцарями разбиваются на замкнутые маршруты. На клетчатой доске любой замкнутый маршрут состоит из чётного числа клеток. Значит, рыцарей — чётное число, а так как всего клеток — нечётное число, то и число лжецов нечётно.

8. В ряд лежит 16 монет, чередуясь: 4 орлом, 4 решкой, 4 орлом, 4 решкой. Разрешается перевернуть любую не крайнюю монету, если её соседи лежат по-разному. Сколько всего рядов можно получить такими операциями из исходного?

Ответ. $C_{15}^3 = 455$. **Решение.** Если две соседние монеты лежат по-разному, положим между ними спичку. Изначально лежат 3 спички. По условию монету можно перевернуть, если с одной стороны рядом с ней есть спичка, а с другой — нет. При переворачивании верх монеты совпадёт уже с другим соседом, то есть спичка перейдёт в соседний промежуток, где раньше спички не было. Поэтому число спичек не изменится и никакие спички не совместятся. Заметим, что положением спичек позиция однозначно определяется: крайняя монета лежит орлом, а при перемещении по ряду положение монеты меняется только при переходе через спичку. Поскольку правило фактически разрешает перепрыгивать спичкой через монету на свободный промежуток, эти 3 спички можно расставить в 15 промежутках как угодно. Значит, число достижимых позиций равно числу расположений спичек, то есть $C_{15}^3 = 455$.