

IV Европейский математический турнир
г. Тверь, 15–20 марта 2021 года



Тур 4. Юниоры. Первая лига, нижние бои.
20 марта

1. Некоторые клетки доски 100×100 покрашены в красный цвет так, что у покрашенных клеток нет общих точек. Докажите, что остальные клетки можно покрасить в три другие цвета так, чтобы никакие две одноцветные клетки не граничили по стороне.

2. Гриша сделал 8 одинаковых игровых кубиков, грани которых пронумерованы тоже одинаково от 1 до 6. Из них он сложил куб $2 \times 2 \times 2$ так, чтобы на каждой паре прилегающих граней двух кубиков сумма была простым числом. Какова наибольшая возможная сумма чисел на поверхности куба?

3. По кругу встали 12 жителей острова лжецов и рыцарей. Каждый заявил: “Ровно один из моих соседей — лжец”. Затем они встали в круг в другом порядке. Более половины из них заявили: “Оба моих соседа — лжецы”. Сколько из них ответят “Да” на вопрос “Верно ли, что оба твоих соседа — рыцари?” Лжецы всегда лгут, а рыцари говорят правду.

4. На конкурсе обжор 6 обжор съели огромный торт. Их спросили, сколько они съели. Ответы были: половина торта, четверть торта, $1/5$ торта, $1/6$ торта, $1/20$ торта и $1/60$ торта. Выяснилось, что некоторые прихвастнули, завысив свой результат вдвое. Кто из них прихвастнул?

5. Какое наименьшее число звеньев может иметь ломаная, которая пересекает (во внутренних точках) каждое своё звено ровно два раза?

6. В турнире по волейболу шесть команд сыграли каждая с каждой по одному разу. Команды, разделившие первые два места, одержали поровну побед; команды, разделившие два последних места, также одержали поровну побед, а остальные одержали разное число побед (ничьих в волейболе не бывает). Сколько побед одержала команда, занявшая 3-е место?

7. На прямой провод уселись 38 попугаев. Каждый верно сосчитал и назвал вслух сумму расстояний от него до остальных попугаев (в метрах). Могли ли быть названы в некотором порядке числа $3, 4, 5, \dots, 40$?

8. Существуют ли четыре различных натуральных числа таких, что каждое из них не делится ни на 2, ни на 3, ни на 4, но сумма любых двух из них делится на 2, сумма любых трёх из них делится на 3 и сумма любых четырёх из них делится на 4?