

IV Европейский математический турнир
г. Тверь, 15–20 марта 2021 года



Тур 3. Юниоры. Гранд-лига.
19 марта

1. Есть поле с картинкой $\frac{X}{X} + \frac{X}{X} + \frac{X}{X} = 1$. На столе лежит 21 карточка с числами $1, 2, \dots, 21$. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За ход каждый берёт себе по две карточки со стола. Выиграет тот, кто сможет после своего хода выбрать из своих шесть карточек и заменить ими “иксы” на поле так, чтобы получилось верное равенство. Может ли кто-нибудь из игроков выиграть, как бы ни играл соперник, и если да, то кто?

2. Электронные часы показывают время (часы и минуты) от 00:00 до 23:59. Сколькими способами можно выбрать пару времён (первое меньше второго) так, чтобы в их записи все 8 цифр были различны?

3. У Гриши и Саши были по одинаковому бумажному квадрату со стороной 1. Каждый из них смог разрезать свой квадрат на 6 прямоугольников периметра 2. Докажите, что наборы прямоугольников у них одинаковы.

4. На столе по кругу лежат 5 внешне одинаковых монет весами 1, 2, 3, 4 и 5 г. Известно, что веса идут по порядку, но неизвестно, по часовой стрелке или против часовой стрелки, и с какого места начинаются. Барон Мюнхгаузен утверждает, что он может, сделав два взвешивания на чашечных весах без гирь, после этого определить вес какой-нибудь из монет. Могут ли слова барона быть правдой?

5. Докажите, что любое десятизначное число можно представить как сумму двух слагаемых, у которых суммы цифр отличаются не больше, чем на 1.

6. Посмотрев на часы со стрелками, Саша увидела, что угол между минутной и часовой стрелкой острый. Посмотрев на часы через два часа, Саша заметила, что угол стал вдвое больше, но остался острым. Какой угол Саша видит сейчас?

7. Поверхность кубика Рубика $5 \times 5 \times 5$ разбита на единичные квадраты. Какое наибольшее число квадратов можно сделать красными так, чтобы красные квадраты не соприкасались ни сторонами, ни даже углами?

8. Даны пять натуральных чисел. В каждой тройке этих чисел их сумма делится на среднее из них по величине. Докажите, что среди чисел есть равные.