IV Европейский математический турнир
г. Тверь, 15–20 марта 2021 года

Тур 1. Юниоры. Гранд-лига.

17 марта

1. Вася сложил из доминошек прямоугольник 21×100 и раскрасил его диагонально в три цвета. В результате каждая доминошка раскрасилась в два цвета. Докажите, что из этих доминошек Вася может составить прямоугольник 35×60, диагонально раскрашенный в три цвета. (Диагональная трёхцветная раскраска означает, что каждая диагональ одного из направлений одноцветна, и если она не одноклеточная, то граничит с двумя диагоналями двух других цветов).

2. Выписаны числа 1, 2, 3, ..., 2021. Можно ли из них выбрать такое число N, чтобы среди остальных у него было ровно 10 делителей и ровно 10 кратных (само число мы ни там, ни тут не считаем)?

3. Компьютер напечатал на ленту числа 1, 2, 3, ..., 2020 в некотором нестандартном порядке, заданном Димой. Пробелы между числами не печатались, поэтому получилась длинная строка из цифр. Какое наибольшее число раз в такой строке можно будет подчеркнуть группу цифр 2021, идущих подряд именно в таком порядке?

4. Ковбои Ивэн и Одд выпустили в мишень по 20 пуль, каждый раз выбивая очки: Ивэн чётное, а Одд — нечётное число. Ивэн попал в десятку, восьмёрку, шестёрку, четвёрку и двойку столько раз, сколько Одд в семёрку, пятёрку, тройку, единицу и девятку соответственно. В сумме они выбили поровну очков. Сколько девяток выбил Одд?

5. В ряд стоят 11 одинаковых шкатулок с одинаковыми монетами, в самой левой 11 монет, в каждой следующей на одну монету больше, чем в предыдущей. Шутник переложил из некоторой шкатулки Ш одну монету в шкатулку слева через одну. Как найти Ш за два взвешивания на чашечных весах без гирь?

6. Куб склеен из 1000 одинаковых деревянных кубиков. Матжучок прогрыз в нём 56 тонких прямых сквозных дыр, параллельных рёбрам и проходящих через центры кубиков. Из центра любого продырявленого кубика жучок может проползти до центра любого другого продырявленного кубика, не выходя на поверхность. Какое наибольшее число кубиков мог продырявить жучок?

7. Есть 20 кусков сыра двух весов. Докажите, что можно съесть один кусок, а часть из остальных (но не все) разрезать каждый на три равные части так, чтобы все имеющие куски были не более чем двух весов и их можно было бы разложить на три равные по весу кучки.

8. За круглым столом сидели несколько лжецов и рыцарей. Первый сказал: “Не считая меня, здесь лжецов на одного больше, чем рыцарей”. Второй сказал: “Не считая меня, здесь лжецов на два больше, чем рыцарей”, и так далее вплоть до последнего. Сколько человек могло сидеть за столом?