

Арифметика

1. Сколько девяток содержит в себе десятичная запись числа $10^{2021} - 2021$?
2. Какой цифрой оканчивается сумма $1! + 2! + 3! + \dots + 2001!$? ($n! = 1 \times 2 \times 3 \dots \times n$)
3. Алина умножила 40% от числа 2 на 60% от числа 3. Сколько процентов от числа 4 у нее получилось в результате?
4. Найдите наибольшее натуральное число с не повторяющимися цифрами, делящееся на 99.
5. Натуральные числа a, b, c таковы, что $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 1$. Найдите наибольшее значение этой суммы дробей.
6. Натуральное число назовём тройным, если оно представимо в виде суммы трёх трёхзначных чисел $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$, где a, b, c — различные ненулевые цифры. Сколько существует тройных чисел?

Геометрия

1. Каждую белую клеточку шахматной доски 8×8 разрезали по обеим диагоналям. На сколько отдельных кусочков распалась доска?
2. На квадратном листе бумаги начертили две параллельные прямые, согнули лист по одной прямой, затем по другой и прокололи в одном месте (не попадающем на линии сгиба). После этого лист разогнули. Сколько различных проколов могло при этом оказаться на листе?
3. Слава нарисовал на клетчатом листе шестиугольник по линиям сетки. Длины сторон которого равны 3, 5, 6, 8, 10, 16 клеток в некотором порядке. Чему может быть равна площадь Славиного шестиугольника? Найдите все ответы.
4. На одной из боковых сторон треугольника взято 60 точек, а на другой — 50 (они все отличны от вершин треугольника). Каждую из вершин при основании соединили отрезками со всеми точками на противоположной стороне. Сколько треугольников получилось среди частей, на которые оказался разбит исходный треугольник?
5. Разрежьте квадрат 10×10 клеток на 16 прямоугольников 2×3 и одну фигуру из 4 клеток типа буквы $\langle \Gamma \rangle$.
6. Вася нарисовал на клетчатом листе квадрат 8×8 и вырезал из него четыре угловые клетки. Какую наибольшую длину может иметь замкнутая самонепересекающаяся ломаная, идущая по линиям сетки получившейся фигуры (в том числе и по краю)?

Логика

1. Среди участников олимпиады, решивших хотя бы одну задачу, оказались 20 человек из 5 классов, решившие в сумме 30 задач. При этом учащиеся из одного класса решили по равному числу задач, а из разных — разное. Сколько школьников решило по две задачи?

2. У Миши есть четыре карточки с надписями: «делится на 11», «простое», «нечетное» и «больше 53». На другой стороне карточек написаны числа 2, 7, 11 и 12. Для любой карточки число, написанное на ней, не обладает свойством, написанным на ее обороте. Какое число написано на карточке с надписью «делится на 11»?

3. Мила сплела ожерелье из черных и белых бусин. Оказалось, что у пяти бусин обе соседние бусины черного цвета, у двух бусин — соседние разного цвета, а у остальных — обе соседние бусины белые. Сколько черных бусин в ожерелье?

4. Среднее количество игроков в 8 командах, принимавших участие в соревновании, равно 6. После того, как среди участников появилась девятая команда, среднее количество игроков стало равным 7. Сколько игроков в девятой команде?

5. В автобусе ехали взрослые и дети, причем число взрослых относилось к числу детей как 2:3. После того, как четыре пассажира вышли (и никто не вошел), число взрослых стало относиться к числу детей как 3:4. Сколько пассажиров первоначально ехало в автобусе, если известно, что их было меньше 60 (перечислите все возможности)?

6. В пяти коробках лежат финики. Известно, что в С лежит треть фиников коробки Е, а в В — вдвое больше, чем в С и Е вместе взятых. В коробке А вдвое меньше фиников, чем в Е, и на 10 меньше, чем в D. В коробке В вчетверо больше фиников, чем в D. Сколько всего фиников во всех коробках?

Комбинаторика

1. Роберт решил составить расписание, по каким дням недели он будет бегать. Он собирается бегать по три дня в каждую календарную неделю (каждую неделю дни одни и те же). Ему не хочется бегать два дня подряд. Сколько возможных вариантов расписания он может составить?

2. Сколькими способами можно поставить на шахматной доске 8×8 короля и ладью так, чтобы они били друг друга?

3. В электричке 8 вагонов, в каждом вагоне едет хотя бы один человек. Будем считать, что два пассажира едут рядом, если они едут либо в одном вагоне, либо в двух соседних. Оказалось, что рядом с каждым пассажиром едут еще либо 6, либо 10 пассажиров. Сколько всего может быть пассажиров в поезде? Укажите все варианты.

4. Вася раз в минуту пишет на доске число. Вначале он написал три 1. Начиная с четвертого числа он записывает число, равное сумме двух чисел: которое он написал за две и за три минуты до этого (т.е. на доске написано 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, ...) Сколько чётных чисел будет на доске, когда Иннокентий напишет 1001 число?

5. На доске написано несколько различных натуральных чисел, причем наименьшее из них равно 1, а наибольшее — 100. Любое число на доске, кроме 1, равно сумме двух (возможно, равных) чисел, написанных на доске. Найдите наименьшее возможное количество чисел, которые могли быть записаны на доске.

6. Цифровые часы показывают время в 12-часовом формате (ЧЧ:ММ, часы меняются от 00 до 11, минуты от 00 до 59). К сожалению, они сломались и вместо любой цифры 1 они всегда показывают цифру 9. Например, вместо 01:16 они показывают 09:96. Какую долю суток часы показывают верное время?