III Европейский математический турнир
г. Минск, 2–8 марта 2020 года

Тур 2. Лига сеньоров.
4 марта

1. На доске записаны числа 1, 2, ..., 2020. Петя и Вася по очереди стирают по одному числу за ход, начинает Петя. Когда на доске останется только два числа, Петя вычисляет их разность и платит Васе количество рублей, равных сумме цифр этой разности. Какую наибольшую сумму может наверняка получить Вася?

А.В. Шаповалов

2. В каждой клетке доски 8×8 сидит по школьнику. Некоторые пары школьников, находящиеся в одной строке или одном столбце, знакомы (пар знакомых из разных столбцов и строк нет). Известно, что для каждого школьника, кроме левого нижнего и правого верхнего, верно условие: количество знакомых справа равно количеству знакомых снизу, а количество знакомых сверху равно количеству знакомых слева. Докажите, что у левого нижнего и правого верхнего школьников поровну знакомых.

Р.С. Ефремов

3. Имеется 1000 гирь с весами в 1г, 2г, 3г, ..., 1000г. Внешне гири ничем не отличаются. За одну операцию можно положить на весы $k < 1000$ гирь и весы покажут их суммарный вес. Верно ли, что для любого k за 999 операций можно узнать вес каждой гири?

Р.С. Ефремов

4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ стороны DA и BC продлили на свои длины за точки A и C. Получили точки P и Q. Оказалось, что диагональ BD пересекает отрезок PQ в его середине K. Пусть M — середина BD. Докажите, что $AKCM$ — параллелограмм.

Д.А. Белов

5. Найдите все натуральные числа, квадрат которых записывается только нечётными цифрами.

6. Внутри прямоугольника отметили точки X и Y так, что расстояния от точки X до сторон прямоугольника относятся как $1:2:3:4$ (в каком то порядке), а от точки Y — как $9:10:11:12$ (в каком то порядке, возможно в другом). Могут ли расстояния от середины отрезка XY до сторон прямоугольника относиться как $5:6:7:8$?

Р.С. Ефремов

7. Дано выражение $\pm 1^3 \pm 2^3 \pm 3^3 \pm \ldots \pm 1\,000\,000^3$. Можно ли выбрать знаки так, чтобы выражение было равно 0?

Р.С. Ефремов по фольклорным мотивам

8. Дан связный граф на $n > 3$ вершинах. Известно, что при удалении ребер любого простого цикла этот граф теряет связность. Какое наибольшее число ребер может быть в этом графе?