I Европейский математический турнир
г. Минск, 27 февраля – 5 марта 2018 года

Высшая лига. Математический бой за 1 место

4 марта

1. Натуральные числа от 1 до 40 записаны в такой последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_{40}$, что $|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \ldots + |a_{40} - a_1| = 800$. Чему может быть равна сумма

$$|a_1 - a_{21}| + |a_2 - a_{22}| + \ldots + |a_{20} - a_{40}|?$$

2. Возьмём бумажный квадрат $ABCD$. Пусть M — середина AD. Согнем квадрат так, чтобы сгиб проходил через точку M, а середина AB попала на диагональ BD. Разогнем лист, отрезок сгиба обозначим как ME. Докажите, что отрезок ME равен стороне квадрата $ABCD$.

3. Дана клетчатая доска 20×20. Для любых двух клеток посчитаем длину минимального пути хромой ладьи (то есть ладьи, которая умеет переходить только в соседние по стороне клетки) между ними. Назовем множество M клеток *хорошим*, если при удалении любой клетки не из M длина минимального пути между какими-то двумя клетками M увеличивается. Найдите минимальное количество клеток в хорошем множестве.

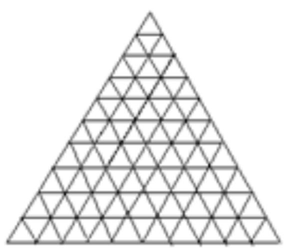
4. У Васи есть миллион одинаковых картонных квадратиков, на каждом написано какое-нибудь натуральное число. Докажите, что из части квадратиков можно сложить больший квадрат, сумма чисел в котором будет делиться на 850.

5. Нецелое положительное число x при округлении до ближайшего целого увеличилось на $2n\%$, а число $2x$ при таком же округлении уменьшилось на $n\%$. Найдите все такие x, для которых n — целое.

6. Обозначим через $S(n)$ сумму всех натуральных делителей числа n. Натуральное число n таково, что $S(n) = 2n - 1$. Докажите, что $\dfrac{S(k)}{k} \neq \dfrac{S(n)}{n}$ при всех натуральных $k \neq n$.

7. Можно ли оклеить поверхность куба 100 равными трехклеточными бумажными уголками без щелей и наложений, если уголки разрешается перегибать через ребро?

8. Автоматическая тюрьма в форме равностороннего треугольника разбита на 100 треугольных камер (см. рис). В каждой внутренней стене есть дверь. Внешних дверей при этом нет, наружу вообще выйти нельзя! :(Единственный узник заполучил мастер-ключ. Если приложить его к столу в центре любой камеры, то состояние всех дверей камеры изменится на противоположное: открытые закроются, а запертые откроются. Сейчас все двери заперты. Может ли узник открыть такой набор внутренних дверей, чтобы через час, когда ключ перестанет менять состояние дверей, узник мог бы свободно гулять по всем камерам тюрьмы? Изначально узник находится в самом верхнем углу башни.



Высшая лига. Математический бой за 3 место

4 марта

1. Натуральные числа от 1 до 40 записаны в такой последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_{40}$, что $|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \ldots + |a_{40} - a_1| = 800$. Чему может быть равна сумма

$$|a_1 - a_{21}| + |a_2 - a_{22}| + \ldots + |a_{20} - a_{40}|?$$

2. Возьмём бумажный квадрат $ABCD$. Пусть M — середина AD. Согнем квадрат так, чтобы сгиб проходил через точку M, а середина AB попала на диагональ BD. Разогнем лист, отрезок сгиба обозначим как ME. Докажите, что отрезок ME равен стороне квадрата $ABCD$.

3. Дана клетчатая доска 20×20. Для любых двух клеток посчитаем длину минимального пути хромой ладьи (то есть ладьи, которая умеет переходить только в соседние по стороне клетки) между ними. Назовем множество M клеток *хорошим*, если при удалении любой клетки не из M длина минимального пути между какими-то двумя клетками M увеличивается. Найдите минимальное количество клеток в хорошем множестве.

4. У Васи есть миллион одинаковых картонных квадратиков, на каждом написано какое-нибудь натуральное число. Докажите, что из части квадратиков можно сложить больший квадрат, сумма чисел в котором будет делиться на 850.

5. Нецелое положительное число x при округлении до ближайшего целого увеличилось на $2n\%$, а число $2x$ при таком же округлении уменьшилось на $n\%$. Найдите все такие x, для которых n — целое.

6. Обозначим через $S(n)$ сумму всех натуральных делителей числа n. Натуральное число n таково, что $S(n) = 2n - 1$. Докажите, что $\dfrac{S(k)}{k} \neq \dfrac{S(n)}{n}$ при всех натуральных $k \neq n$.

7. Можно ли оклеить поверхность куба 64 равными трехклеточными бумажными уголками без щелей и наложений, если уголки разрешается перегибать через ребро?

8. На доске написаны числа $1, 2, \ldots, 100$. За ход можно стереть 4 числа, сумма которых делится на 101. Петя и Вася ходят по очереди. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник?

I Европейский математический турнир
г. Минск, 27 февраля – 5 марта 2018 года

Высшая лига. Математический бой за 5 место

4 марта

1. Вася задумал трехзначное натуральное число. Он посчитал остатки при делении этого числа на 2, 4, 6, 8, 10, 12 и сложил их. У него получилось 36. Какое число мог задумать Вася?

2. $ABCD$ и $AEDF$ — прямоугольники, прямая DE делит сторону BC пополам. Докажите, что треугольник ABE — равнобедренный.

3. Дана клетчатая доска 21×21. Для любых двух клеток посчитаем длину минимального пути хромой ладьи (то есть ладьи, которая умеет переходить только в соседние по стороне клетки) между ними. Назовем множество M клеток *хорошим*, если при удалении любой клетки не из M длина минимального пути между какими-то двумя клетками M увеличивается. Найдите минимальное количество клеток в хорошем множестве.

4. У Васи есть миллион одинаковых картонных квадратиков, на каждом написано какое-нибудь натуральное число. Докажите, что из части квадратиков можно сложить больший квадрат, сумма чисел в котором будет делиться на 500.

5. Нецелое положительное число x при округлении до ближайшего целого увеличилось на $2n\%$, а число $2x$ при таком же округлении уменьшилось на $n\%$. Найдите все такие x, для которых n — целое.

6. В строку записаны несколько натуральных чисел, их последние цифры не повторяются; начиная со второго, каждое делится на предыдущее. Какое наибольшее количество чисел может быть в такой строке?

7. Можно ли разрезать куб на кубики двух разных размеров так, чтобы кубиков каждого размера было поровну?

8. На доске написаны числа $1, 2, \ldots, 100$. За ход можно стереть 4 числа, сумма которых делится на 101. Петя и Вася ходят по очереди. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник?

Товарищеские бои

4 марта

1. Вася задумал трехзначное натуральное число. Он посчитал остатки при делении этого числа на 2, 4, 6, 8, 10, 12 и сложил их. У него получилось 36. Какое число мог задумать Вася?

2. $ABCD$ и $AEDF$ — прямоугольники, прямая DE делит сторону BC пополам. Докажите, что треугольник ABE — равнобедренный.

3. Дана клетчатая доска 21×21. Для любых двух клеток посчитаем длину минимального пути хромой ладьи (то есть ладьи, которая умеет переходить только в соседние по стороне клетки) между ними. Назовем множество M клеток *хорошим*, если при удалении любой клетки не из M длина минимального пути между какими-то двумя клетками M увеличивается. Найдите минимальное количество клеток в хорошем множестве.

4. У Васи есть миллион одинаковых картонных квадратиков, на каждом написано какое-нибудь натуральное число. Докажите, что из части квадратиков можно сложить больший квадрат, сумма чисел в котором будет делиться на 500.

5. Нецелое положительное число x при округлении до ближайшего целого увеличилось на $2n\%$, а число $2x$ при таком же округлении уменьшилось на $n\%$. Найдите все такие x, для которых n — целое.

6. В строку записаны несколько натуральных чисел, их последние цифры не повторяются; начиная со второго, каждое делится на предыдущее. Какое наибольшее количество чисел может быть в такой строке?

7. Можно ли разрезать куб на кубики двух разных размеров так, чтобы кубиков каждого размера было поровну?

8. Вначале на доске написано число 2018. Каждым ходом число можно уменьшить на любую из его ненулевых цифр (например, из 2018 можно получить $2018-2=2016$, $2018-1=2017$ и $2018-8=2010$). Аня и Боря ходят по очереди, начинает Аня. Кто получит однозначное число, проигрывает. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник?