I Европейский математический турнир
г. Минск, 27 февраля – 5 марта 2018 года

Высшая лига. Математический бой № 3. Вариант А

3 марта

1. Числа x, y, z нецелые. При этом выполнено равенство

$$x(x-3)+2yz = y(y-3)+2zx = z(z-3)+2xy.$$

Какие значения может принимать выражение $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$?

2. Дан треугольник ABC, в котором $\angle B = 120^\circ$. На сторонах AB и BC взяты такие точки E и F соответственно, что $AE = EF = FC$. Пусть M — середина AC. Найдите $\angle EMF$.

3. Квадрат разрезали на несколько треугольников, и в каждом провели по одной медиане. Докажите, что сумма длин этих медиан не меньше длины диагонали квадрата.

4. Многозначное число 123456789101112...99100 получено записью чисел от 1 до 100 подряд без пробелов. Между цифрами вставили несколько знаков «плюс» и «минус» так, чтобы получилось выражение, равное 0. Могло ли число вставленных знаков быть меньше 12?

5. Клетки полоски 4×20 красят в 4 данных цвета так, чтобы не было одноцветных домино и во всех вертикалях и горизонталях были клетки всех 4 цветов. Докажите, что таких раскрасок не более $8 \cdot 3^{39} - 9 \cdot 2^{41}$.

6. Дано целое число N. В стране Энцелопудрии к берегу реки подошли жители с весами ровно 5, 6, ..., N пудов. У них есть лодка, в которой помещаются не более четырёх жителей. Они садятся в лодке на две скамейки, и для равновесия веса на скамейках должны быть одинаковы. При каких N все они могут переправиться на другой берег?

7. Участники мартовского турнира оставили Астрид 29 предоплатных транспортных карт с 1, 2, 3, ..., 29 кронами. Карту можно пополнить в любой момент, добавив любую сумму не меньше 100 крон. За одну поездку с карты в этом марте ещё снимается 30 крон, а начиная с 1 апреля — 31 крона. Астрид ездит регулярно, в марте она должна сделать ровно 50 поездок, а остальные — начиная с апреля. Она хочет в конце концов добиться, чтобы на всех картах осталось 0. Какую наименьшую сумму ей придется истратить на пополнения?

8. Дан полный граф на $n > 4$ вершинах. Его ребра раскрашены в красный и синий цвета. Известно, что граф остается связным при стирании всех ребер любого из цветов. Докажите, что из графа можно удалить $n-4$ вершины и все выходящие из них ребра так, чтобы оставшийся граф по прежнему при удалении всех ребер любого цвета оставался связным.

Высшая лига. Математический бой № 3. Вариант Б

3 марта

1. Числа x, y, z нецелые. При этом выполнено равенство

$$x(x-3)+2yz = y(y-3)+2zx = z(z-3)+2xy.$$

Какие значения может принимать выражение $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$?

2. Дан треугольник ABC, в котором $\angle B = 120^\circ$. На сторонах AB и BC взяты такие точки E и F соответственно, что $AE = EF = FC$. Пусть M — середина AC. Найдите $\angle EMF$.

3. Три высоты разбивают остроугольный треугольник на 6 меньших треугольников. Среди частей нашлись 3 равных треугольника. Могут ли все остальные треугольники быть им не равны?

4. Многозначное число 123456789101112...99100 получено записью чисел от 1 до 100 подряд без пробелов. Между цифрами вставили несколько знаков «плюс» и «минус» так, чтобы получилось выражение, равное 0. Могло ли число вставленных знаков быть меньше 40?

5. Клетки полоски 4×20 красят в 4 данных цвета так, чтобы не было одноцветных домино и во всех вертикалях и горизонталях были клетки всех 4 цветов. Докажите, что таких раскрасок меньше, чем $8\cdot 3^{39}$.

6. Дано целое число N. В стране Энцелопудрии к берегу реки подошли жители с весами ровно 5, 6, ..., N пудов. У них есть лодка, в которой помещаются не более четырёх жителей. Они садятся в лодке на две скамейки, и для равновесия веса на скамейках должны быть одинаковы. При каких N все они могут переправиться на другой берег?

7. Участники мартовского турнира оставили Астрид 29 предоплатных транспортных карт с 1, 2, 3, ..., 29 кронами. Карту можно пополнить в любой момент, добавив любую сумму не меньше 100 крон. За одну поездку с карты в этом марте ещё снимается 30 крон, а начиная с 1 апреля — 31 крона. Астрид ездит регулярно, в марте она должна сделать ровно 50 поездок, а остальные — начиная с апреля. Она хочет в конце концов добиться, чтобы на всех картах осталось 0. Какую наименьшую сумму ей придется истратить на пополнения?

8. Автобусы привезли на турнир 72 участника. В автобусах они сидели парами, и ровно в половине пар участники были знакомы. Докажите, что в столовой их можно рассадить за столы так, чтобы не менее чем за 18 столами нашелся участник, у которого за столом знакомых и не знакомых поровну. Количества участников за разными столами могут отличаться, одному за стол садиться нельзя.

Первая лига. Математический бой № 3

3 марта

1. Числа x, y, z нецелые. При этом выполнено равенство

$$x(x-3)+2yz = y(y-3)+2zx = z(z-3)+2xy.$$

Какие значения может принимать выражение $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$?

2. Дан треугольник ABC, в котором $\angle B = 120^\circ$. На сторонах AB и BC взяты такие точки E и F соответственно, что $AE = EF = FC$. Пусть M — середина AC. Найдите $\angle EMF$.

3. Три высоты разбивают остроугольный треугольник на 6 меньших треугольников. Среди частей нашлись 3 равных треугольника. Могут ли все остальные треугольники быть им не равны?

4. Многозначное число 123456789101112...3940 получено записью чисел от 1 до 40 подряд без пробелов. Между цифрами вставили несколько знаков «плюс» и «минус» так, чтобы получилось выражение, равное 0. Могло ли число вставленных знаков быть меньше 25?

5. Перед Аней, Борей и Васей лежит на столе по кучке орехов, всего 100 орехов. Сначала Аня съела у себя 1 орех, а половину оставшихся отдала Боре. Потом то же сделал Боря, отдав половину Васе. Наконец, то же сделал Вася, отдав половину Ане. В результате и у Ани и у Бори стало столько же орехов, сколько вначале. Сколько?

6. Дано целое число N. В стране Энцелопудрии к берегу реки подошли жители с весами ровно 5, 6, ..., N пудов. У них есть лодка, в которой помещаются не более четырёх жителей. Они садятся в лодке на две скамейки, и для равновесия веса на скамейках должны быть одинаковы. При каком наименьшем нечетном N все они могут переправиться на другой берег?

7. Участники мартовского турнира оставили Астрид 29 предоплатных транспортных карт с 1, 2, 3, ..., 29 кронами. Карту можно пополнить в любой момент, добавив любую сумму не меньше 100 крон. За одну поездку с карты снимается 30 крон. Астрид ездит регулярно и хочет добиться, чтобы на всех картах осталось 0 крон. Какую наименьшую сумму ей придется истратить на пополнения?

8. Автобусы привезли на турнир 72 участника. В автобусах они сидели парами, и ровно в половине пар участники были знакомы. Докажите, что в столовой их можно рассадить за столы так, чтобы не менее чем за 18 столами нашелся участник, у которого за столом знакомых и не знакомых поровну. Количества участников за разными столами могут отличаться, одному за стол садиться нельзя.